16263

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS IV.

1928—1929

SZEGED

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA
LITTERARUM AC SCIENTIARUM
REGIAE UNIVERSITATIS HUNGARICAE FRANCISCO-JOSEPHINAE

SECTIO

SCIENTIARUM MATHEMATICARUM.

REDIGUNT:

A. HAAR — F. RIESZ.

TOMUS IV.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK.

SZERKESZTIK:

HAAR ALFRÉD — RIESZ FRIGYES.

IV. KÖTET.

1928—1929.

SZEGED.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM BARÁTAI EGYESÜLETÉNEK KIADÁSA.

SZEGED VÁROSI NYOMDA ÉS KÖNYVKIADÓ R.-T. 29—2307.

INDEX — TARTALOM.

Tomus IV. — 1928/29 — IV. Kötet.

BIBLIOGRAPHIE.

Some notes on the notion of capacity in potential theory.*)

By O. D. Kellogg (Cambridge, Mass.).

1. Introduction. The study of the problem of Dirichlet for general regions and for continuous boundary values has, by recent investigations, been reduced to an examination of the character of the boundary in the neighborhood of each of its points. Let T denote a domain (or open continuum) of space, and let $T_1, T_2, \ldots$ denote an infinite sequence of domains in T for each of which the Dirichlet problem is possible, each including the preceding, and such that each point in T lies in a domain of the sequence. Let $f(p)$ denote a continuous function of the position of the point p on the boundary t of T, and $F(P)$ a function continuous throughout space, and coinciding with $f(p)$ on t. If u_n is the function harmonic in T_n, assuming the same boundary values as $F(P)$, then the sequence $u_1, u_2, \ldots$ converges to a harmonic limit u, uniformly in any closed region in T.[1]) The function u is independent of the set of regions $T_1, T_2, \ldots$ and of the continuous extension $F(P)$ of the assigned boundary values $f(p)$.[2]) There are points of t at which u approaches $f(p)$, no matter how this continuous function is chosen. These are called *regular* boundary points. For some regions there exist boundary points for which u does not approach the given boundary values for all continuous $f(p)$. Such points are called *exceptional* boundary points. If the

*) Lecture delivered at the meeting on June 8, 1928 of the Mathematical Seminary of the University of Szeged.

[1]) Kellogg, *Proc. Amer. Acad.*, Vol. 58 (1923) p. 528—29.

[2]) N. Wiener, *Journ. of Math. and Phys. of the Mass. Inst. of Tech.*, vol. 3 (1924) p. 25.

boundary values are given by $1/\overline{pQ}$, where Q is a fixed interior point of T, $G(P, Q) = 1/\overline{PQ} - u$ is a generalized function of Green for T, and the regular boundary points are those at which $G(P, Q) \to 0$. All other boundary points are exceptional.[3]) Wiener[4]) has given a criterion for the regular or exceptional character in terms of the notion of *capacity* of a set of points. Let e denote any bounded set of points. The set e, together with its limit points, may have as complement several domains, but the complement will certainly contain an infinite domain T whose whole boundary lies in e. The function u, harmonic in T and vanishing at infinity, corresponding to the boundary values 1, in the manner indicated above, is called the *conductor potential* of the set e. The total charge producing this potential, given by Gauss' integral, is called the *capacity* of the set e. Obviously it is never negative.

2. The Bounds of Harmonic Functions. Consider first a domain T bounded by a smooth surface t. Let U be harmonic in T and continuous in $T+t$, and let M denote its maximum. Then for any $\alpha > 0$, the set of points e of t at which $U > M - \alpha$ contains all the points of a surface in a neighborhood of one of its points, and it is a simple matter to show that e has positive capacity. We now establish a generalization of this fact:

Theorem I. *Let T be any domain of space, whose boundary is a bounded, non-empty set. Let U be bounded and harmonic in T. If M denotes the least upper bound of U, the set e of boundary points of T at which* $\limsup U > M - \alpha$ *is, for any positive α, a set of positive capacity.*

Suppose the theorem were untrue, and that the capacity of the set e in question were 0. Let τ denote the infinite domain in the complement of e whose whole boundary lies in e, and $\tau_1, \tau_2, \ldots$ a sequence of nested domains whose limit is τ, for each of which the Dirichlet problem is possible. If u_n is the conductor potential of τ_n, the function

$$M - \alpha + u_n \alpha - U$$

is harmonic in the domain common to τ_n and τ, and has a non-negative lower limit everywhere on the boundary of this domain

---

3) Kellogg, *Proc. Nat. Acad. Washington*, vol. **12** (1926), p. 398.

4) Loc. cit. 2).

Hence it is nowhere negative. This is true in the limit as n becomes infinite. But if the capacity of e were 0, $\lim_{n\to\infty} u_n$ would be 0 everywhere except on e and we should have

$$M-\alpha-U\geqq 0$$

throughout T. Thus $M-\alpha$ would be an upper bound of U, contrary to the hypothesis. It follows that the capacity of e must be positive.

3. Removable Singularities. The notion of capacity makes possible a complete characterization of the sets of points which are the seats of at most removable singularities of harmonic functions. The facts are given in the two following theorems.[5])

Theorem II. *Let T be any domain whose boundary is a bounded set of points, and let B be any portion of the boundary with the properties.*

a) *the set of points $T'=T+B$ is a domain (open continuum), and*

b) *the portion of B in any closed region in T' has the capacity* 0.

Then any function U bounded and harmonic in T, may be so defined at the points of B as to be harmonic in T'.

Let Q be any point of B. By property a), it is the center of a sphere σ, lying in T'. On the surface of σ, U is bounded and continuous, except at the points of B. There is therefor a function V, bounded and harmonic in σ, and approaching on the surface the same values as U at all points not in B.[6]) Then in the portion of T within σ, $V-U$ is bounded, and approaches the boundary values 0, except at the points of B in and on σ, that is, by property b), except at the points of a set of capacity 0. It follows from Theorem I that $V-U=0$ in the portion of T within σ. Hence if we modify U so as to be equal to V within σ, it will be harmonic in a neighborhood of Q. Thus the singularity of U at any point of B is removable.

---

[5]) The first of these is a generalization of theorem VII given in my paper in the *Proc. Nat. Acad. Washington,* loc. cit. The second is the correct form of theorem VIII in the same paper, there incorrectly stated. The inaccuracy was kindly pointed out to me by Dr. VASILESCO, and I am grateful for this opportunity to set the matter right.

[6]) See Lemma III, *Proc. Nat. Acad. Washington,* loc. cit.

Theorem III. *Conversely, if B is any set with the property* a), *and if any function, bounded and harmonic in T can have at most removable singularities at the point of B, then B has the property* b).

Let B' denote the portion of B in any closed region in T', and let u denote the conductor potential of B'. This function is bounded and harmonic everywhere except at the points of B' and their limit points. But B' is closed and thus the only singularities of u belong to B, and so, by hypothesis are removable. If u is suitably redefined at the points of B', it becomes harmonic everywhere, and as it vanishes at infinity, it vanishes identically. Hence the capacity of B' is 0, as was to be proved.

4. A Suspected Theorem of Uniqueness. In the introductory section, it was indicated how to given continuous boundary values always corresponds a function, harmonic in T. This function is always bounded, and assumes the given boundary values at every regular boundary point. The method of determining this function cannot lead to a different result. The question suggests itself *could any other method lead to a different function, bounded and harmonic in T, and assuming the same continuous boundary values at every regular point?* Confining ourselves to domains whose boundary set is bounded, this question would be settled if the following statement were established:

A) *There is no function other than* 0 *which is bounded and harmonic in T and which approaches* 0 *at every regular boundary point.*

As a possible contribution to the problem of settling the validity or falsity of this statement, we shall prove that it is equivalent to the following:

B) *Any bounded closed set of points of positive capacity contains at least one regular point,* that is, a regular point of the boundary of the infinite domain whose whole boundary is contained in the set.

Let U denote a bounded function, harmonic in T, approaching 0 at every regular boundary point. If it is not identically 0 either U or $-U$ will have a positive least upper bound M. Consider the first case. The set e at which $\limsup U \geqq M/2$, is bounded, closed, and of positive capacity, by Theorem I. Hence it follows from B) that e contains a regular point, at which $\lim U = 0$, and we have a contradiction. The assumption that either $\limsup U$ or $\limsup(-U)$ is positive is untenable, and thus A) follows from B).

Now let e be a bounded, closed set, of positive capacity, and let T denote the infinite domain of the complement of e, whose boundary is contained in e. If the boundary of T contains no regular points, both 0 and the conductor potential u of e approach 0 at all regular boundary points of T, and it follows from A) that $u=0$ in T, and hence that the capacity of e is 0. Thus the assumption that e has no regular points is in contradiction with A) and hence B) follows from A).

(Received June 29, 1928)

A remark on the dynamical rôle of POINCARÉ's last geometric theorem.*)

By G. D. BIRKHOFF (Cambridge, Mass.).

Consider a dynamical system with one degree of freedom; the equations of motion in the canonical form of HAMILTON are:

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q},\quad \frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}$$

where $H=H(p,q)$ is a function of p and q. From the condition that the energy $H(p,q)$ is constant, the solution can be obtained by a quadrature, and this case does not offer any especial interest.

For the case of two degrees of freedom assume the equations of motion in the HAMILTONian form:

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad \frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\qquad (i=1,2)$$

where $H=H(p_1,q_1,p_2,q_2)$. Consider p_1,q_1,p_2,q_2 as coördinates in space of four dimensions. In the neighborhood of a periodic solution the values p_1,q_1,p_2,q_2 corresponding to the different states of motion correspond to a three-dimensional torus, in consequence of the energy relation. As is well known, the problem can then be reduced to the HAMILTONian case $n=1$, namely

$$\text{(1)}\qquad \frac{dp}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial q},\quad \frac{dq}{d\tau}=\frac{\partial H}{\partial p}$$

where $H=H(p,q,\tau)$, τ being an angular variable of period 2π which measures the distance of two points along the three-dimen-

*) Lecture delivered at the meeting on June 8, 1928 of the Mathematical Seminary of the University of Szeged.

sional torus. The given periodic motion can be made to correspond to $p=q=0$.

We may represent this system in the following form:

$$\frac{dp}{d\tau}=P,\ \frac{dq}{d\tau}=Q,\ \frac{dr}{d\tau}=R=1 \tag{2}$$

where

$$P=-\frac{\partial H}{\partial q} \text{ and } Q=\frac{\partial H}{\partial p}$$

and r replaces τ in P and Q.

Let us consider p, q, r as rectangular coördinates in space of three dimensions.

The above equations give the direction of a stream line at every point of the (p, q, r)-space. The motions of the dynamical system are interpreted as the stream lines of a three-dimensional fluid in steady motion.

Consider the planes $r=0$ and $r=2\pi$; two points of these planes which have the same coördinates (p, q) are to be considered as congruent; they correspond to the same state of motion in consequence of the periodicity in τ.

Take a point P of the plane $r=0$ whose coördinates we denote by (p, q), and follow the stream line starting from P up to the point P_1 with coördinates (p_1, q_1) in which it meets the plane $r=2\pi$. The correspondence between the points P and P_1 furnishes a transformation T of the (p, q)-plane into itself. For this transformation the origin $p=q=0$ is an invariant point.

The transformation T has two important properties. In the first place the quantities P, Q, R satisfy to the relation

$$\frac{\partial P}{\partial p}+\frac{\partial Q}{\partial q}+\frac{\partial R}{\partial r}=0.$$

This means that the stream flow in space for which the velocity components are P, Q, R, is that of an incompressible fluid.

Secondly if we consider a small closed curve in the plane $r=0$ and the cylinder of height h bounded by the stream lines passing through the points of this curve and the planes $r=0$ and $r=h$, it is clear that after an interval of time 2π this cylinder goes into a like cylinder of height h with an equal area σ_1 of the corresponding curve in the plane $r=2\pi$ as base; this is a consequence of incompressibility. In other words the transformation T preserves areas. Consequently the Jacobian

$$J\begin{pmatrix} p_1, & q_1 \\ p, & q \end{pmatrix}$$

is 1.

Hence to the dynamical problem corresponds a certain area-preserving transformation T of the (p, q)-plane into itself with invariant point at the origin. To the important properties of the dynamical system for motions near to the given periodic motion correspond properties of T.

If H is analytic in p, q, τ then p_1, q_1 will also be analytic in p, q. Likewise if H is continuous together with all of its partial derivatives, the same will be true of p_1, q_1.

There arises now the interesting question as to whether or not there exists conversely a dynamical problem of this type for every such transformation T. The following result in this connection will be proved:

If

$$p_1 = \varphi(p, q), \quad q_1 = \psi(p, q)$$

is an area-preserving transformation T such that φ, ψ are continuous together with all of their partial derivatives, while the origin $p = q = 0$ is an invariant point, then there exists a corresponding dynamical system (1) *such that H is continuous together with all of its partial derivatives in p, q, τ and periodic of period 2π in τ.*

It would be of decided interest to establish a like result in the analytic case.

In the neighborhood of the origin the transformation T from (p, q) to (p_1, q_1) is essentially an affine transformation of determinant 1. Such a linear transformation can always be obtained by a one-to-one analytic deformation (rotation or stretching) which takes each point (p, q) into its transformed point $(\overline{p}_1, \overline{q}_1)$ while a parameter r varies from 0 to 2π. Upon this transformation may be superimposed the very small displacement with components

$$\frac{r}{2\pi}(p_1 - \overline{p}_1), \quad \frac{r}{2\pi}(q_1 - \overline{q}_1).$$

The combined transformation depending upon the parameter r leaves the origin invariant, yields a one-to-one transformation of the neighborhood of the origin into itself, and takes (p, q) into (p_1, q_1) as r increases form 0 to 2π.

As r varies from 0 to 2π, the points (p, q, r) describe arcs of curves joining $(p, q, 0)$ to $(p_1, q_1, 2\pi)$ in such a way that r increases, and the complete neighborhood of the r axis for $0 \leqq r \leqq 2\pi$ is filled by these in a one-to-one manner. If we set down all congruent arcs of curves obtained by a translation of space by a distance $2k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ in the direction of the positive r axis, all of (p, q, r) space in the neighborhood of the r axis is filled by curves made up of such arcs whose equations will have the form

$$p = f(r), \; q = g(r)$$

in which f and g are continuous together with all of their derivatives except for $r = 0, \pm 2\pi, \ldots$ where there may exist finite jumps in the derivatives.

Now imagine a deformation of the region $0 \leqq r \leqq 2\pi$ of (p, q, r) space in the direction of the r axis, in accordance with the formula

$$r = k \int_0^{\varrho} e^{\frac{1}{\varrho(\varrho - 2\pi)}} d\varrho$$

where the constant k is so selected that for $\varrho = 2\pi$, r is 2π also. Evidently r is thereby defined as a function of ϱ, continuous together with all of its derivatives for $0 \leqq \varrho \leqq 2\pi$, while all of these derivatives vanish for both $\varrho = 0$ and $\varrho = 2\pi$.

When this deformation of (p, q, r) space is made for $0 \leqq r \leqq 2\pi$, together with the corresponding congruent deformations of the regions

$$2k\pi \leqq r \leqq 2(k+1)\pi, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

a modified set of curves is obtained in which the functions f, g involved are everywhere continuous together with all of their derivatives.

Now let each point P move along its curve in the direction of the r axis with unit velocity. Any area σ in the plane $r = 0$ is thus carried into an area σ_0 in any plane $r = r_0$. But we have

$$\iint_{\sigma} dp\, dq = \iint_{\sigma_0} J\, dp\, dq$$

where $J(p, q, r)$ denotes the corresponding Jacobian. Consequently it is evident that the triple integral

$$\iiint J(p,q,r)\,dp\,dq\,dr$$

is invariant. Here J is not only continuous together with all of its derivatives, but is periodic in r of period 2π since $J(p,q,2\pi)=1$ by hypothesis.

Suppose now that we deform (p,q,r) space in the direction of q axis so that

$$\bar{q}=\int_0^q J(p,q,r)\,dq.$$

This deformation is evidently periodic in the desired sense and does not affect points in the planes $r=2k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. The new invariant integral is then simply the ordinary volume integral $\iiint dp\,dq\,dr$ in the modified variables.

The corresponding differential equations are

$$\frac{dp}{d\tau}=P,\quad \frac{dq}{d\tau}=Q,\quad \frac{dr}{d\tau}=1$$

where P, Q are continuous functions of p, q, r, together with their partial derivatives of all orders, and periodic of period 2π in r. Since volumes are invariant we have of course

$$\frac{\partial P}{\partial p}+\frac{\partial Q}{\partial q}=0.$$

This means that a function H of the same type exists for which

$$P=-\frac{\partial H}{\partial q},\quad Q=\frac{\partial H}{\partial p}.$$

In other words the given area-preserving transformation may be associated with a dynamical problem of the stated type.

This remark shows that the area-preserving property of the transformation used by Poincaré in his last geometric theorem is really its characteristic property. The remark shows also how the dynamical problem leads to the consideration of a transformation near an invariant point, or near a single closed invariant curve into which such a point may be expanded, rather than to a transformation defined over a complete ring as required by Poincaré. It was for this reason that I developed a modification of Poincaré's theorem for a transformation of this less restricted type, which seems more appropriate to many of the actual dynamical applications. Indeed the more detailed consideration of these applications shows that for many purposes the use of Poincaré's last geometric theorem in a modified self-evident form will suffice, once the analytic details are developed.[1])

From a general topological point of view the plane translation theorem of BROUWER may be looked upon as dealing with the morphology of continuous one-to-one transformations of the sphere with only a single invariant point. In the same way a suitable extension of the theorem of POINCARÉ[2]) throws light on the morphology of any such transformation of the sphere with only two such points. An important new method of attack devised by KERÉKJÁRTÓ but not yet published[3]) seems to afford a means of treating these and other similar questions on a common fundamental basis.

(Received June 12, 1928)

---

1) Cf. chapter 6 of my book on *Dynamical Systems*, New-York, 1927.

2) See my paper: An extension of POINCARÉ's last geometric theorem, *Acta Mathematica* **47** (1925), p. 297.

3) See p. 86 of this volume (note of the editors).

Rösselsprung auf dem unendlichen Schachbrette.*)

Von JOSEF KÜRSCHÁK in Budapest.

Hier soll gezeigt werden, *dass der Springer das unendliche Schachbrett von irgend einem Felde ausgehend so durchlaufen kann, dass er jedes Feld genau einmal betritt.*

1. Wir betrachten vorerst nur ein Schachbrett mit 5×5 Feldern, legen aber an jede seiner Seiten ein ebensolches Brett (Fig. 1.).

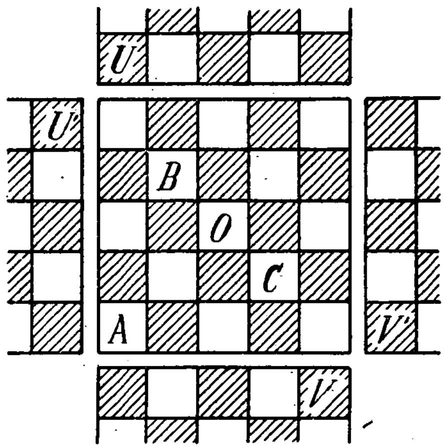

Fig. 1.

O bezeichne das Feld in der Mitte des betrachteten Brettes, *A* sei ein Eckfeld, *B* und *C* seien die an *O* anstossenden Felder in derjenigen Diagonale des Brettes, die nicht Durch *A* geht.

Durchlauft der Springer die Felder des betrachteten Brettes in der in Fig. 2 dargestellten Reihenfolge, so kommt er vom Eckfelde *A* nach *B*, wovon er dann das Eckfeld *U* des oben angelegten oder das Eckfeld *U'* des links angelegten Brettes betreten kann.[1])

7	12	17	22	5
18	**25**	6	11	16
13	8	23	4	21
24	19	2	15	10
1	14	9	20	3

Fig. 2

In ähnlicher Weise kann der Springer von *A* nach *C* gelangen, von wo er *V* oder *V'* betreten kann.

*) Vortrag gehalten am 8. Juni 1928 in der Sitzung des mathematischen Seminars der Universität zu Szeged.

[1]) Mit Rösselsprüngen auf Schachbretten mit 5×5 Feldern beschäftigte

2. Wir gehen nun zum unendlichen Schachbrette über, das wir in Quadrate von je 5×5 Feldern zerlegen.

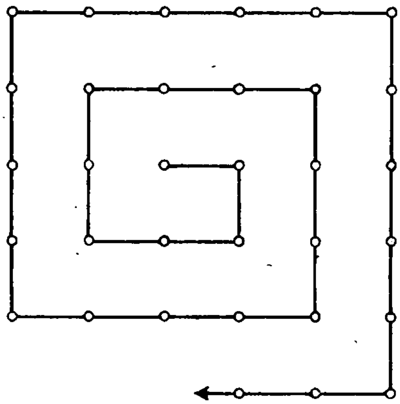

Fig. 3.

Wir setzen den Springer auf ein Eckfeld eines solchen Quadrates und lassen ihn die Quadrate in einer angemessenen Ordnung der Weise durchlaufen, dass jedes Quadrat in einem Eckfelde betreten und dann so besprungen wird, dass das nächste Quadrat wieder in einem Eckfelde betreten werden kann. Die Zusammenfügung der Quadrate in eine Folge ist in Fig. 3 dargestellt, wo die Quadrate durch Punkte (oder eigentlich kleine Kreise) vertreten sind.

(Eingegangen am 24. Juni 1928)

sich eingehend Euler in seiner Arbeit: Solution d'une questione curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse, *Historie de l'Académie, Berlin* Bd. **15**, (vom Jahre 1759, erschienen 1761; das Titelblatt ist fehlerhaft von 1766 datiert). Siehe besonders §§ 36—40, p. 332—335. Von dem in § 36 angegebenen Rösselsprung unterscheidet sich unsere Figur 2. nur insofern, dass die Felder 23 und 25 vertauscht sind.

Über die Grenzen der Abschnitte gewisser Potenzreihen.

Von Leopold Fejér in Budapest.

Einleitung.

1. Betrachten wir irgendeine, im Innern des um den Nullpunkt der Ebene geschlagenen Einheitskreises reguläre und positive harmonische Funktion. Bezeichnet dann

(1) $$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

die unendliche harmonische Entwickelung dieser Funktion, genommen an irgendeiner, aber festen Stelle des abgeschlossenen Einheitskreises, dann sind die arithmetischen Mittel der Partialsummen der Reihe (1) alle nichtnegativ;[1] d. h. es ist

(2) $$S_n=\frac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n+1}\geqq 0,$$

wo $$s_k=\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu,$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

Bezeichnet die Reihe (1) die, für eine Stelle des abgeschlossenen Einheitskreises $|z|\leqq 1$ genommene Potenzreihe von $f(z)$, wo $f(z)$ für $|z|<1$ regulär ist und die Ungleichung $|f(z)|\leqq 1$ befriedigt, so ist[2])

(3) $$|S_n|\leqq 1$$

für $$n=0,1,2,\ldots.$$

Durch alleinige Anwendung der Eigenschaften (2) oder (3) der *arithmetischen Mittel der Partialsummen* der Reihe (1) wurde

[1]) Fejér 2, § 2, N° 10, 11. S. auch Fussnote [4]) der zitierten Arbeit.

[2]) Fejér 2, Theorem XI. Landau 1, S. 17.

nun im Laufe der Zeit eine Anzahl von Sätzen entwickelt, die sich auf die *Partialsummen* s_n selbst der Reihe (1) beziehen. Sie rühren von den Herren[3]) LANDAU, SCHUR, SZEGŐ, ROGOSINSKI und vom Verfasser her. Dass bei dem Beweise ausschliesslich die Fundamentalungleichung (2) resp. (3) der arithmetischen Mittel der Fourierreihe resp. der Potenzreihe zur Verwendung kam, wurde aber vielfach übersehen, oder nicht ausdrücklich betont. Ich habe es also für nützlich gefunden eine solche, demnächst erscheinende, Darstellung (FEJÉR 4) dieser Untersuchungen abzufassen, aus welcher u. A. hervorgeht, dass die ins Auge gefassten Sätze eigentlich Spezialfälle allgemeinerer Sätze sind, die sich auf die Abschnitte einer beliebigen unendlichen Reihe

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

beziehen, wenn für sie die Ungleichungen $S_n \geqq 0$, oder die Ungleichungen $|S_n| \leqq 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, gültig sind. Etc. Ich muss aber noch hinzufügen, dass es sich dabei nicht nur um die Konsequenzen der Prämisse (2), oder (3) i. B. auf die Partialsummen

$$a_0,\ a_0 + a_1, \ldots\ a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \ldots,$$

sondern auch i. B. auf die Polynome

$$a_0,\ a_0 + a_1 r, \ldots\ a_0 + a_1 r + \ldots + a_n r^n, \ldots$$

handelt, wo $0 < r < 1$.

2. Vorliegende Note hat genau dieselbe Tendenz, als meine eben erwähnte Arbeit. Von einer beliebigen unendlichen Reihe mit komplexen Gliedern

(4) $$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

sei wieder etwa

(5) $$|S_n| \leqq 1,\ n = 0\ 1\ 2$$

bekannt. Ausse

(6)

bestehen. Was $_n|$, d. h. der absoluten Werte (aussagen?

Oder es s

(7) $|($ 1

gültig. Was läs soluten Partialsummen $|s_n|$ au

[3]) Ausführlic finden.

In vorliegender Note, die im Wesentlichen eine Analyse meiner Note in den *Acta Mathematica*[4]) enthält, beschäftige ich mich nur mit der zweiten Frage, und werde auf die erste in einer anderen Note zurückkehren.

Schliesslich bemerke ich noch, dass ich bei der Behandlung dieses Gegenstandes, in der erwähnten Arbeit und in der vorliegenden Note, eigentlich noch eine weitere, übrigens an der Hand liegende, Vereinfachung angestrebt habe. Sie besteht darin, dass ich statt der unendlichen Reihe eine endliche Summe $a_0+a_1+\ldots+a_n$, statt der Potenzreihe ein Polynom $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ betrachte.

§ 1. Lösung einer Aufgabe des Maximums.

3. Aufgabe. *Es sei n irgendeine feste positive ganze Zahl. Man bestimme das Maximum von*

(8) $$|s_n|=|a_0+a_1+\ldots+a_n|,$$

wenn die komplexen Grössen $a_0, a_1, \ldots a_n$ die beiden Bedingungen

(9) $$|S_n|=\left|\frac{(n+1)a_0+na_1+\ldots+a_n}{n+1}\right|\leqq 1$$

(10) $$|a_1|^2+2|a_2|^2+\ldots+n|a_n|^2\leqq 1$$

erfüllen.

Da

(11) $$S_n=\frac{(n+1)a_0+na_1+\ldots+a_n}{n+1}=s_n-\frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n+1},$$

so ist

(12) $$s_n=S_n+\frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n+1}=S_n+R_n,$$

und

(13) $$|s_n|\leqq|S_n|+|R_n|.$$

Nun ist aber

(14) $$|R_n|\leqq\frac{1}{n+1}(|a_1|+2|a_2|+\ldots+n|a_n|)=$$
$$=\frac{1}{n+1}(\sqrt{1}\,.\sqrt{1}\,|a_1|+\sqrt{2}\,.\sqrt{2}\,|a_2|+\ldots+\sqrt{n}\,.\sqrt{n}\,|a_n|),$$

also ist, auf Grund der Schwarzschen Ungleichung,

(15) $$|s_n|\leqq|S_n|+\frac{1}{n+1}\cdot\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\sqrt{|a_1|^2+2|a_2|^2+\ldots+n|a_n|^2}.$$

[4]) Fejér 3.

Berücksichtige ich jetzt die Bedingungen (9) und (10), so erhalte ich die Ungleichung

$$(16) \qquad |s_n| \leqq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

4. Ich behaupte nun, dass $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ das gesuchte Maximum ist; d. h. ich behaupte, dass in der Ungleichung (16), bei passender Wahl der den Bedingungen (9) und (10) genügenden Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_n$, das Gleichheitszeichen tatsächlich gültig sein kann.

Wann ist in (16) die Gültigkeit des Gleichheitszeichens möglich?

Zunächst dürfen die Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nicht alle verschwinden, denn dann wäre doch $s_n = 0$. Weiter muss in (14) das Gleichheitszeichen gültig sein, woraus unmittelbar

$$(17) \qquad a_1 = \varrho_1 e^{i\theta}, \ a_2 = \varrho_2 e^{i\theta}, \ldots, a_n = \varrho_n e^{i\theta}$$

folgt. Da aber auch bei der Anwendung der Schwarzschen Ungleichung keine tatsächliche Verkleinerung[5]) eintreten darf, so muss die Proportion

$$(18) \qquad \sqrt{1} : \sqrt{2} : \ldots : \sqrt{n} = \sqrt{1}\varrho_1 : \sqrt{2}\varrho_2 : \ldots : \sqrt{n}\varrho_n$$

gelten, d. h. es muss

$$(19) \qquad \varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_n = \varrho \neq 0$$

gelten.

Weiter muss

$$(20) \qquad |a_1|^2 + 2|a_2|^2 + \ldots + n|a_n|^2 = 1$$

sein, d. h.

$$\varrho^2 (1 + 2 + \ldots + n) = 1,$$

d. h.

$$(21) \qquad \varrho = \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}}.$$

Es muss aber auch

$$(22) \qquad |S_n| = \left| \frac{(n+1)a_0 + na_1 + \ldots + a_n}{n+1} \right| = 1$$

sein, d. h. es muss sein

$$\frac{1}{n+1} \left| (n+1)a_0 + \varrho e^{i\theta} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right| = 1,$$

---

[5]) Pólya—Szegö 1, Bd. 1, S. 54, Aufgabe 80, und die Lösung auf S. 210.

$$\left| a_0 + \frac{n}{2} \varrho e^{i\theta} \right| = 1,$$

$$a_0 + \frac{n}{2} \varrho e^{i\theta} = e^{i\varphi},$$

$$a_0 = e^{i\varphi} - \frac{n}{2} \varrho e^{i\theta} = e^{i\varphi} - \frac{n}{2} \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}} e^{i\theta},$$

(23) $$a_0 = e^{i\varphi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} e^{i\theta},$$

wozu noch das schon früher gefundene (in den Gleichungen (17), (19) und (21) enthaltene) Resultat

(24) $$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}} e^{i\theta}$$

kommt.

Für die so abgeleiteten Werte von $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sind nun tatsächlich einerseits die Bedingungen (9) und (10) befriedigt, andererseits ist

(25) $$|s_n| = \left| e^{i\varphi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} e^{i\theta} + n \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}} e^{i\theta} \right| =$$
$$= \left| e^{i\varphi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} e^{i\theta} \right| = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}},$$

aber nur dann, wenn, endlich, $e^{i\varphi} = e^{i\theta}$ ist.

Die Lösung unserer Maximumaufgabe lautet also:

Der grösste Wert von

(26) $$|a_0 + a_1 + \ldots + a_n|$$

ist, bei den Nebenbedingungen (9) *und*[6]) (10),

(27) $$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}},$$

---

[6]) Wenn ich die Bedingung (9) fallen lasse und nur die Bedingung (10) beibehalte, so ist der grösste angenommene Wert von

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n|$$

gleich

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}.$$

der nur für

$$\left\{\begin{aligned} a_0 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ a_1 &= a_2 = \ldots = a_n = \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}} \end{aligned}\right. \tag{28}$$

angenommen wird, wenn ich von einen gemeinsamen komplexen Faktor vom absoluten Betrage 1 der Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ absehe.

5. Die 2 Nebenbedingungen meiner Aufgabe lauteten

$$|S_n| = \left|\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}\right| \leqq 1,$$

$$|a_1|^2 + 2|a_2|^2 + \ldots + n|a_n|^2 \leqq 1.$$

Welchen Wert hat das Maximum von $|s_n|$, wenn ich jetzt die erste Bedingung durch die $(n+1)$ Bedingungen

$$|S_0| \leqq 1, \quad |S_1| \leqq 1, \ldots, |S_n| \leqq 1 \tag{29}$$

ersetze, und die zweite unverändert beibehalte, wo

$$S_k = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_k}{k+1}, \quad s_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_k, \tag{30}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots n.$$

Die Antvort lautet: das Maximum von $|s_n|$ ist wieder

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Beweis. Das neue Maximum kann nicht grösser sein als das alte. Aber auch nicht kleiner, weil das Wertsysthem (28) auch die Bedingungen (29) erfüllt. Da nämlich die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ in (28) positiv sind, also ist die Folge

$$S_0, S_1, \ldots, S_n \tag{31}$$

monoton wachsend, und da doch $S_n = 1$ ist, so ist $S_0 < 1$, $S_1 < 1, \ldots, S_{n-1} < 1$.

§ 2. Ein Satz über die rationale ganze Funktion. Über die Schlichtheit von $1 + z + \ldots + z^n$.

6. *Das Polynom*

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \tag{32}$$

der komplexen Veränderlichen z und mit komplexen Koeffizienten *erfülle die Bedingung*

$$(33)\qquad |a_1|^2+2|a_2|^2+\ldots+n|a_n|^2\leqq 1.$$

Ist dann

$$(34)\qquad |S_n|=\left|\frac{(n+1)a_0+na_1+\ldots+a_n}{n+1}\right|\leqq 1,$$

so ist

$$(35)\qquad |s_n|=|a_0+a_1+\ldots+a_n|\leqq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Von einem konstanten Faktor vom absoluten Betrage 1 *abgesehen ist*

$$(36)\qquad G(z)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}+\sqrt{\frac{2}{n(n+1)}}(z+z^2+\ldots+z^n).$$

das einzige Polynom, für welches in (35) *das Zeichen der Gleichheit, d. h. für welches*

$$(37)\qquad |a_0+a_1+\ldots+a_n|=1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

gültig ist.

Ist auf dem ganzem Einheitskreise $|z|=1$ *die Ungleichung*

$$(38)\qquad |S_n(z)|=\left|\frac{(n+1)a_0+na_1z+\ldots+a_nz^n}{n+1}\right|\leqq 1$$

gültig, so ist auch auf dem ganzem Einheitskreise

$$(39)\qquad |a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n|\leqq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Dieser Satz ist mit dem Satze von § 1 einfach identisch.

7. Mit Rücksicht auf § 3 ist es nicht ohne Interesse zu untersuchen, wie „weit" das Extremalpolynom $G(z)$ unter (36) „schlicht" ist. Statt $G(z)$ können wir $1+z+\ldots+z^n$, oder natürlich auch

$$(40)\qquad g_{n-1}(z)=g(z)=1+z+\ldots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}$$

untersuchen. Da, für $z_1\neq 1$, $z_2\neq 1$, $z_1\neq z_2$

$$(41)\qquad \frac{g(z_1)-g(z_2)}{z_1-z_2}=\frac{1-(z_1^{n-1}+\ldots+z_2^{n-1})+z_1z_2(z_1^{n-2}+\ldots+z_2^{n-2})}{(1-z_1)(1-z_2)},$$

so ist, wenn weiter

$$(42)\qquad |z_1|\leqq\varrho<1,\quad |z_2|\leqq\varrho<1,$$

$$(43)\qquad \left|\frac{g(z_1)-g(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqq\frac{1-n\varrho^{n-1}-(n-1)\varrho^n}{|1-z_1||1-z_2|}>0,$$

wenn ϱ kleiner ist als die einzige (übrigens zwischen 0 und 1 liegende) positive Wurzel der trinomischen Gleichung

$$1-n\varrho^{n-1}-(n-1)\varrho^{n}=0.$$

Ich habe also erhalten:

Das Polynom

$$1+z+\ldots+z^{n}, \tag{44}$$

wo $n\geqq 1$, *ist im Kreise* $|z|<\varrho_n$ *schlicht, d. h. nimmt in diesem Kreise nicht zweimal denselben Wert an, wenn* ϱ_n *die einzige positive Wurzel der trinomischen Gleichung*

$$1-(n+1)\varrho^{n}-n\varrho^{n+1}=0 \tag{45}$$

bezeichnet.

Ist n *gerade*, so ist $|z|=\varrho_n$ der *grösste* Kreis, in dessen Inneren (44) schlicht ist. Da nämlich

$$g_n'(z)=(1+z+\ldots+z^{n})'=\frac{1-(n+1)z^{n}+nz^{n+1}}{(1-z)^2}, \tag{46}$$

so ist im Falle eines geraden n

$$g_n'(-\varrho_n)=\frac{1-(n+1)\varrho_n^{n}-n\varrho_n^{n+1}}{(1+\varrho_n)^2}=0,$$

woraus folgt, dass $1+z+\ldots+z^{n}$ für $|z|<\varrho$ nicht schlicht ist, wenn der Radius $\varrho>\varrho_n$ ist. Es ist z. B. $\varrho_2=\frac{1}{2}$.

Der Fall eines ungeraden n muss jedenfalls noch untersucht werden, da für $n=1$

$$1-2\varrho_1-\varrho_1^2=0,$$

also

$$\varrho_1=\sqrt{2}-1$$

ist, während doch $1+z$ in der ganzen Ebene schlicht ist.

Schliesslich bemerke ich, dass, für ein beliebiges n, aus der Gleichung (45)

$$(n+1)\varrho_n^{n}+n\varrho_n^{n+1}=1,$$

wegen $0<\varrho_n<1$, die Ungleichungen

$$(n+1)\varrho_n^{n+1}+n\varrho_n^{n+1}<1$$

$$(n+1)\varrho_n^{n}+n\varrho_n^{n}>1$$

folgen, also die Ungleichungen

$$\frac{1}{(2n+1)^{\frac{1}{n}}}<\varrho_n<\frac{1}{(2n+1)^{\frac{1}{n+1}}}, \tag{47}$$

aus welchen u. A.

(48) $$\lim_{n=\infty} \varrho_n = 1$$

geschlossen werden kann.[7])

§ 3. Über die Grenzen der Partialsummen gewisser Potenzreihen.

8. Es sei

(49) $$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

eine für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe, welche den Bedingungen

I) $$|f(z)| \leqq 1 \text{ für } |z| < 1$$

II) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |a_\nu|^2 \leqq 1$$

genüge leistet.

Ist die Bedingung I) erfüllt, und ist speziell die Funktion $f(z)$ für $|z| < 1$ schlicht, so ist auch die Bedingung II) sicher erfüllt.

Was lässt sich über die Grenzen der Zahlen

(50) $$|s_0|, |s_1|, \ldots |s_n|, \ldots$$

feststellen, wo $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Weiss man nur, dass die Bedingung I) allein erfüllt ist, so kann bekanntlich für ein spezielles $f(z)$ der $\limsup_{n=\infty} |s_n| = +\infty$ sein.[8])

Weiss man nur, dass die Bedingung II) allein erfüllt ist, so kann sogar $\lim_{n=\infty} |s_n| = +\infty$ sein. Z. B. für

(51) $$f(z) = \log 2 \,.\, \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^n}{n \log n}.$$

Sind aber die Bedingungen I), II) gleichzeitig erfüllt, so ist

(52) $$|s_n| \leqq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \text{ für } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

---

7) Über die Schlichtheit der Abschnitte einer schlichten Potenzreihe handelt eine demnächst in den *Math. Annalen* erscheinende, und bemerkenswerte allgemeine Theoreme enthaltende Arbeit von Herrn G. Szegö, die den Titel führt: Zur Theorie der schlichten Abbildungen.

8) Fejér 1. Landau 1, S. 7–9, 17–29. Die Konstruktion eines Beispiels ist nicht ganz leicht. $\lim_{n=\infty} |s_n| = +\infty$ ist *nicht* möglich, weil nach Herrn I. Schur

$$\frac{|s_0| + |s_1| + \ldots + |s_n|}{n+1} \leqq 1$$

ist.

also insbesondere

(53) $$|s_n| \leqq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1{\cdot}7071\ldots, \text{ für } n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Betrachtet man nämlich einen Abschnitt

(54) $$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

der Potenzreihe (49), so ist, nach einem Satze des Verfassers,[9])

(55) $$|S_n| = \left| \frac{(n+1)\,a_0 + n\,a_1 + \ldots + a_n}{n+1} \right| \leqq 1,$$

mit Rücksicht auf die Ungleichung I). Aus II) folgt weiter, dass

(56) $$\sum_{\nu=1}^{n} \nu\,|a_\nu|^2 \leqq 1.$$

Also ist auf das Polynom (54) der Satz des § 2 anwendbar, und unsere Behauptung ist erwiesen.

Es sei besonders hervorgehoben,[10]) dass, wenn $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär, schlicht und absolut genommen $\leqq 1$ ist, alle Koeffizientensummen absolut genommen kleiner sind als $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, d. h.

(57) $$|a_0 + a_1 + \ldots + a_n| \leqq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1{\cdot}17071\ldots, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

9. Ich bemerke schliesslich, dass $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1{\cdot}7071\ldots$ nicht die beste, bis jetzt bekannte obere Grenze der Folge

(58) $$|s_0|, |s_1|, \ldots |s_n|, \ldots$$

ist, wo die Folge (58) zu einer beliebigen Funktion $f(z)$ gehört, die den Bedingungen I) und II) gleichzeitig genüge leistet. In einer demnächst erscheinenden Arbeit ist es Herrn Szegö[11]) durch eine scharfsinnige Betrachtung gelungen diese obere Grenze von $1{\cdot}7071\ldots$ auf $1{\cdot}616\ldots$ herabzudrücken, wobei er sich u. A. auf einen Rogosinski—Szegöschen Satz stützt.

Dass die fragliche obere Grenze sich nicht unter den Wert $1 + \frac{1}{4} = 1{\cdot}25$ herabdrücken lässt, ist sehr leicht einzusehen.[12])

Budapest, den 16. Juni 1928.

---

[9]) S. die Fussnote [2])

[10]) Fejér 3.

[11]) S. die Einleitung seiner in der Fussnote [7]) erwähnten Arbeit.

[12]) Fejér 3.

Litteraturverzeichniss.

L. Fejér

1. Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften.* Jahrgang 1910, 3. Abhandlung, 17 Seiten.

2. Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierten Mittelkurven und Mittelflächen, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* Bd. XXXVIII (1914).

3. Über die Koeffizientensumme einer beschränkten und schlichten Potenzreihe, *Acta Mathematica,* Bd. 49, (1926), S. 183–190.

4. Einige Sätze, die sich auf das Vorzeichen einer ganzen rationalen Funktion beziehen; nebst Anwendungen dieser Sätze auf die Abschnitte und Abschnittsmittelwerte von ebenen und räumlichen harmonischen Entwicklungen und von beschränkten Potenzreihen, *Monatshefte für Mathematik und Physik,* Jahrgang 1928.

E. Landau

1. Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin (1916).

G. Pólya und G. Szegö

1. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. 1, Berlin (1925).

(*Eingegangen am 18. Juni 1928*)

Über die Laplacesche Reihe.

Von G. Szegö in Königsberg.

Im Bd. 95 der *Math. Annalen* hat Herr W. Rogosinski[1]) ein bemerkenswertes Theorem über trigonometrische Reihen veröffentlicht, das in einem für die Anwendungen besonders wichtigen Spezialfalle folgendermassen lautet:

A) *Es sei $f(x)$ eine stetige und periodische Funktion mit der Periode 2π und $s_n(x)$ bezeichne den n-ten Abschnitt der zu $f(x)$ gehörigen* Fourierschen *Reihe. Dann gilt, wenn man unter p eine beliebige ungerade Zahl versteht,*

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n\left(x+p\frac{\pi}{2n}\right)+s_n\left(x-p\frac{\pi}{2n}\right)}{2}=f(x)$$

Ist dagegen p eine beliebige reelle, aber keine ungerade Zahl, so gibt es geeignete stetige Funktionen, für welche dieser Grenzwert nicht existiert.

Die Bedeutung dieses Satzes wird klar, wenn man beachtet, dass es stetige Funktionen $f(x)$ gibt, für welche die Abschnittsfolge $s_0(x), s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x), \ldots$ ihrer Fourierschen Reihe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ oszilliert.[2])

Die Auszeichnung der ungeraden Zahlen p wird durch das folgende allgemeinere Theorem aufgeklärt:

B) *Es sei ξ eine beliebige reelle Zahl. Man hat unter den gleichen Voraussetzungen wie vorhin,*

$$(2)\qquad \frac{s_n\left(x+\frac{\xi}{n}\right)+s_n\left(x-\frac{\xi}{n}\right)}{2}-(s_n(x)-f(x))\cos\xi\to f(x)\quad (n\to\infty).$$

---

[1]) Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen, *Mathematische Annalen*, Bd. 95 (1925), S. 110—134.

[2]) Vgl. L. Fejér, Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 137 (1909), S. 1—5.

Diese Grenzwertgleichung gilt gleichmässig in ξ, wenn $-\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_0$ ist, wobei ξ_0 eine positive Zahl bedeutet.

Herr ROGOSINSKI beweist ferner in seiner oben angeführten Arbeit den folgenden Satz:[3])

C) *Es sei ξ eine beliebige reelle Zahl. Wir betrachten eine beliebige trigonometrische Reihe mit der Abschnittsfolge $s_0(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x), \ldots, s_n(x), \ldots$. Wenn diese Folge an einer gewissen Stelle x C_1-summierbar ist, u. zw. mit der Summe s, so ist*

$$(3) \qquad \frac{s_n\left(x+\frac{\xi}{n}\right)+s_n\left(x-\frac{\xi}{n}\right)}{2}-(s_n(x)-s)\cos\xi \to s \quad (n\to\infty).$$

Diese Grenzwertgleichung gilt gleichmässig in ξ, wenn $-\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_0$ ist, $\xi_0 > 0$.

Da die FOURIERsche Reihe einer stetigen Funktion $f(x)$ nach einem klassischen Satz von L. FEJÉR[4]) an jeder Stelle x C_1-summierbar ist, u. zw. mit der Summe $f(x)$, so folgt hieraus unmittelbar der Satz B.

Bemerkung. Wir haben bisher nur die „0-dimensionalen Mittelwerte“

$$(4) \qquad \frac{s_n\left(x+\frac{\xi}{n}\right)+s_n\left(x-\frac{\xi}{n}\right)}{2}$$

der Abschnitte $s_n(x)$ betrachtet. Bilden wir nun die „linearen Mittelwerte“

$$(5) \qquad \frac{n}{2\xi}\int_{x-\frac{\xi}{n}}^{x+\frac{\xi}{n}} s_n(t)\,dt,^{5)}$$

so gilt für diese ein ganz ähnliches Theorem wie C, mit dem einzigen Unterschied, dass an Stelle von (3) die Grenzwertgleichung

$$(3') \qquad \frac{n}{2\xi}\int_{x-\frac{\xi}{n}}^{x+\frac{\xi}{n}} s_n(t)\,dt-(s_n(x)-s)\frac{\sin\xi}{\xi}\to s \quad (n\to\infty)$$

---

[3]) A. a. O. [1]), S. 119, Satz 3.

[4]) L. FEJÉR, Untersuchungen über FOURIERsche Reihen, *Mathematische Annalen*, Bd. 58 (1904), S. 51–69, insb. S. 59.

[5]) Für $\xi=0$ ist dieser Ausdruck durch $s_n(x)$ und $\frac{\sin\xi}{\xi}$ in (3') durch 1 zu ersetzen.

tritt. Auch diese Gleichung gilt gleichmässig in ξ, wenn $-\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_0$ ist, $\xi_0 > 0$. Der Beweis verläuft ganz analog wie der von (3).

Die Behauptung des Satzes C ist freilich mit der folgenden gleichwertig: Es sei $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ eine Folge von reellen Zahlen mit der Eigenschaft

$$\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right); \tag{6}$$

dann gilt

$$\frac{s_n(x+\alpha_n)+s_n(x-\alpha_n)}{2} - (s_n(x)-s)\cos n\,\alpha_n \to s \quad (n\to\infty). \tag{3''}$$

Ähnlich kann übrigens auch (3′) umgeformt werden.

* * *

In der vorliegenden Arbeit stelle ich mir die Aufgabe, die eben ausgesprochenen Sätze auf das räumliche Analogon der Fourierschen Reihen, auf die s. g. Laplaceschen Reihen zu übertragen. Ich setze dabei die einfachsten Eigenschaften der Kugelfunktionen als bekannt voraus.[6])

Wir gehen von einer auf der Einheitskugel E definierten stetigen Funktion $f(\mathfrak{q}) = f(\vartheta, \varphi)$ aus. Hierbei bedeutet $\mathfrak{q}$ einen beliebigen Punkt von E, mit ϑ und φ bezeichnen wir ihre beiden geographischen Koordinaten. Es ist

$$0 \leqq \vartheta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi.$$

Die zu $f(\mathfrak{q}) = f(\vartheta, \varphi)$ gehörige Laplacesche Reihe sei

$$Y_0(\vartheta, \varphi) + Y_1(\vartheta, \varphi) + Y_2(\vartheta, \varphi) + \ldots + Y_n(\vartheta, \varphi) + \ldots, \tag{7}$$

wo bekanntlich

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint\limits_E f(\vartheta', \varphi')\, P_n(\cos\gamma)\, d\sigma \tag{8}$$

ist. Dabei bezeichnet $P_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom, γ die sphärische Distanz der beiden Punkte $\mathfrak{q}(\vartheta, \varphi)$ und $\mathfrak{q}'(\vartheta', \varphi')$, schliesslich $d\sigma$ das Flächenelement der Einheitskugel E.

Auch hier empfiehlt es sich neben den Laplaceschen Reihen allgemeiner beliebige, *formal gebildete* Reihen von der Form (7) zu betrachten, wobei $Y_n(\vartheta, \varphi)$ eine beliebige Kugelflächenfunktion n-ter Ordnung bedeutet. Diese nach Kugelflächenfunktionen fort-

[6]) Man. vgl. über diesen Gegenstand etwa: R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik (Berlin: J. Springer, 1924), Siebentes Kapitel, §§ 3—5.

schreitenden Reihen entsprechen im dreidimensionalen Gebiete den gewöhnlichen trigonometrischen Reihen.

Es sei nun $s_n(\vartheta, \varphi) = s_n(\mathfrak{q})$ der n-te Abschnitt einer solchen Reihe. Wir definieren zwei Mittelwerte von $s_n(\mathfrak{q})$, welche im folgenden benützt werden sollen und den Mittelwerten (4) bzw. (5) entsprechen. Es sei $0 < \eta < \pi$, und man betrachte auf der Einheitskugel einerseits den Kreis um den Punkt $\mathfrak{q}$ als Mittelpunkt und vom Radius η, anderseits die Kalotte um den Punkt $\mathfrak{q}$ als Mittelpunkt und vom Radius η. (Es handelt sich also um die Gesamtheit aller Punkte der Einheitskugel, deren sphärische Distanz von $\mathfrak{q}$ gleich η bzw. höchstens gleich η ist.) Wir bezeichnen mit $\mathfrak{m}[\mathfrak{q}, \eta; s_n(\mathfrak{q}')]$ den Integralmittelwert von $s_n(\mathfrak{q}')$ über diesem Kreis und mit $\mathfrak{M}[\mathfrak{q}, \eta; s_n(\mathfrak{q}')]$ den Integralmittelwert von $s_n(\mathfrak{q}')$ über dieser Kalotte. Diese Mittelwerte sind offensichtlich invariant gegenüber Drehungen der Einheitskugel. In dem Spezialfalle, wo $\mathfrak{q}$ mit dem Nordpol $\mathfrak{p}$ übereinstimmt, erhält man z. B.

$$\mathfrak{m}[\mathfrak{p}, \eta; s_n(\mathfrak{q}')] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s_n(\eta, \varphi)\, d\varphi \tag{9}$$

und

$$\mathfrak{M}[\mathfrak{p}, \eta; s_n(\mathfrak{q}')] = \frac{1}{2\pi(1-\cos\eta)}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\eta} s_n(\vartheta, \varphi)\sin\vartheta\, d\vartheta\right\} d\varphi. \tag{10}$$

Der lineare Mittelwert (9) ist das räumliche Analogon von (4), der zweidimensionale Mittelwert (10) ist das räumliche Analogon von (5).

Es gilt das folgende Theorem:

A') *Es sei $s_n(\mathfrak{q})$ der n-te Abschnitt der* Laplace*schen Reihe einer auf der Einheitskugel definierten stetigen Funktion $f(\mathfrak{q})$. Bilden wir den Mittelwert $\mathfrak{m}\left[\mathfrak{q}, \frac{\xi}{n}; s_n(\mathfrak{q}')\right]$ von $s_n(\mathfrak{q}')$ (ξ reell und fest)*[7]*, so konvergiert dieser für $n \to \infty$ gegen $f(\mathfrak{q})$, vorausgesetzt, dass ξ eine Nullstelle der 0-ten Besselschen Funktion $J_0(x)$ ist.*

---

[7]) Hier und im folgenden bedeutet $\mathfrak{m}\left[\mathfrak{q}, \frac{\xi}{n}; s_n(\mathfrak{q}')\right]$, ferner auch $\mathfrak{M}\left[\mathfrak{q}, \frac{\xi}{n}; s_n(\mathfrak{q}')\right]$ für $\xi = 0$ den Abschnittswert $s_n(\mathfrak{q})$, für negatives ξ dagegen den der Zahl $-\xi$ entsprechenden Mittelwert. Wir haben freilich n von vorherein so gross zu wählen, dass $\left|\frac{\xi}{n}\right| < \pi$ ausfällt.

Ist dagegen ξ keine Nullstelle der Besselschen Funktion $J_0(x)$, so gibt es geeignete stetige Funktionen $f(\mathfrak{q})$, für welche die Folge dieser Integralmittelwerte bei $n \to \infty$ divergiert.

Dem Satz B entspricht:

B′) *Es sei ξ eine beliebige reelle Zahl. Man hat unter den gleichen Voraussetzungen wie in* A

$$(11) \qquad \mathfrak{m}\left[\mathfrak{q}, \frac{\xi}{n}; s_n(\mathfrak{q}')\right] - (s_n(\mathfrak{q}) - f(\mathfrak{q}))J_0(\xi) \to f(\mathfrak{q}) \quad (n \to \infty).$$

Diese Grenzwertgleichung gilt gleichmässig in ξ, wenn $-\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_0$ ist, wobei ξ_0 eine positive Zahl bedeutet.

Wir beweisen weiter unten das folgende Theorem, welches die beiden vorangehenden enthält:

C′) *Es sei ξ eine beliebige reelle Zahl. Wir betrachten eine beliebige nach Kugelflächenfunktionen fortschreitende Reihe mit der Abschnittsfolge $s_0(\mathfrak{q}), s_1(\mathfrak{q}), s_2(\mathfrak{q}), \ldots, s_n(\mathfrak{q}), \ldots$. Wenn diese Folge in einem gewissen Punkte $\mathfrak{q}$ der Einheitskugel C_1-summierbar ist, u. zw. mit der Summe s, so ist*

$$(12) \qquad \mathfrak{m}\left[\mathfrak{q}, \frac{\xi}{n}; s_n(\mathfrak{q}')\right] - (s_n(\mathfrak{q}) - s)J_0(\xi) \to s \quad (n \to \infty).$$

Diese Grenzwertgleichung gilt gleichmässig in ξ, wenn $-\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_0$ ist, $\xi_0 > 0$.

Der entsprechende Satz über die zweidimensionalen Mittelwerte $\mathfrak{M}\left[\mathfrak{q}, \frac{\xi}{n}; s_n(\mathfrak{q}')\right]$ lautet wie folgt:

C″) *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in* C *gilt*

$$(13) \qquad \mathfrak{M}\left[\mathfrak{q}, \frac{\xi}{n}; s_n(\mathfrak{q}')\right] - (s_n(\mathfrak{q}) - s)\left(2\frac{J_1(\xi)}{\xi}\right) \to s \quad (n \to \infty).$$

Hier bedeutet $J_1(x)$ die erste Besselsche Funktion.

Auch diese Grenzwertgleichung gilt gleichmässig in ξ, wenn $-\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_0$ ist, $\xi_0 > 0$.

Wählt man also für ξ eine Nullstelle von $J_0(x)$ bzw. $\frac{J_1(x)}{x}$, so konvergieren $\mathfrak{m}\left[\mathfrak{q}, \frac{\xi}{n}; s_n(\mathfrak{q}')\right]$ bzw. $\mathfrak{M}\left[\mathfrak{q}, \frac{\xi}{n}; s_n(\mathfrak{q}')\right]$ für $n \to \infty$ gegen s. Wir sehen, dass die ausgezeichnete Rolle der Funktionen $\cos x$ und $\frac{\sin x}{x}$ im Raume die Funktionen $J_0(x)$ und $\frac{J_1(x)}{x}$ über-nehmen. Sie haben bekanntlich unendlich viele, u. zw. lauter reelle Nullstellen.

Die Theoreme B′, C′, C″ können freilich ähnlich umgeformt werden wie oben (3″), indem man eine beliebige Folge von reellen Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ mit der Eigenschaft (6) wählt und die Mittelwerte $\mathfrak{m}[\mathfrak{q}, \alpha_n; s_n(\mathfrak{q}')]$ und $\mathfrak{M}[\mathfrak{q}, \alpha_n; s_n(\mathfrak{q}')]$ betrachtet.

In § 1 schicke ich gewisse Eigenschaften der Legendreschen Polynome und der Laplaceschen Reihe voraus, welche später benötigt werden. § 2 enthält den Beweis des Theorems C′, § 3 den analogen Beweis des Theorems C″.

§ 1.

Hilfssätze.

1. In der vorliegenden Arbeit spielt der folgende Satz eine Rolle:

I. *Es sei $P_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom. Dann gilt für beliebige reelle Werte von ξ, u. zw. gleichmässig für $-\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_0$, $\xi_0 > 0$,*

$$P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) = w_0(\xi) + \frac{w_1(\xi)}{n} + \frac{w_2(\xi)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{14}$$

wobei $w_0(x)$, $w_1(x)$ und $w_2(x)$ wohlbestimmte ganze transzendente Funktionen sind, von denen $w_1(x)$ und $w_2(x)$ an der Stelle $x=0$ von der zweiten bzw. vierten Ordnung verschwinden.[8]) *Es ist übrigens*

$$w_0(x) = J_0(x). \tag{15}$$

Man beweist dies besonders einfach auf Grund der Laplaceschen Integraldarstellung der Legendreschen Polynome:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1}\cos t)^n\, dt.$$

Es ist danach

$$P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos\frac{\xi}{n} + i\sin\frac{\xi}{n}\cos t\right)^n dt.$$

Nun gilt gleichmässig in ξ und t $(-\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_0,\ 0 \leqq t \leqq \pi)$

---

[8]) Die „Gleichmässigkeit" des O-Gliedes bedeutet, dass es mit n^3 multipliziert dem absoluten Betrage nach kleiner bleibt als eine nur von ξ_0 abhängende Konstante. In ähnlichem Sinne ist im folgenden die Gleichmässigkeit von O-Gliedern in irgend welchen Variablen gedacht.

$$\cos\frac{\xi}{n}+i\sin\frac{\xi}{n}\cos t=1+\frac{i\xi\cos t}{n}-\frac{\xi^2}{2n^2}-\frac{i\xi^3\cos t}{6n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

so dass

$$\left(\cos\frac{\xi}{n}+i\sin\frac{\xi}{n}\cos t\right)^n$$

$$=\exp\left\{n\left[\frac{i\xi\cos t}{n}-\frac{\xi^2}{2n^2}-\frac{i\xi^3\cos t}{6n^3}+\frac{\xi^2\cos^2 t}{2n^2}+\frac{i\xi^3\cos t}{2n^3}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{i\xi^3\cos^3 t}{3n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{i\xi\cos t-\frac{\xi^2\sin^2 t}{2n}+\frac{i\xi^3\cos t\sin^2 t}{3n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}$$

$$=e^{i\xi\cos t}\left\{1-\frac{\xi^2\sin^2 t}{2n}+\frac{i\xi^3\cos t\sin^2 t}{3n^2}+\frac{\xi^4\sin^4 t}{8n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}$$

ist, woraus die Behauptung folgt. Man hat übrigens

$$w_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos t}\,dt=J_0(x).$$

$$w_1(x)=-\frac{x^2}{2}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos t}\sin^2 t\,dt=-\frac{x^2}{2}(J_0''(x)+J_0(x))=$$

$$=\frac{x}{2}J_0'(x)=-\frac{x}{2}J_1(x).$$

Eine leichte Rechnung liefert weiter

$$w_2(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos t}\left(\frac{ix^3\cos t\sin^2 t}{3}+\frac{x^4\sin^4 t}{8}\right)dt=$$

$$=-\frac{x}{12}J_0'(x)-\frac{x^2}{24}J_0(x).$$

Man sieht ohne weiteres, dass $w_1(x)$ für $x=0$ von der zweiten Ordnung verschwindet; ausserdem bestätigt man ohne Schwierigkeit, dass $x=0$ eine vierfache Nullstelle für $w_2(x)$ ist.

2. Es wird ferner Gebrauch gemacht von dem Satz

II. *Die* LAPLACE*sche Reihe einer auf der Einheitskugel gegebenen überall stetigen Funktion $f(\vartheta,\varphi)$ ist in jedem Punkte der Einheitskugel C_1-summierbar mit der Summe $f(\vartheta,\varphi)$.*

Diese Eigenschaft der LAPLACEschen Reihe ist zum ersten Mal von T. H. GRONWALL bewiesen worden. Einfachere Beweise stammen von F. LUKÁCS und L. FEJÉR. Bezüglich der Literatur vgl. die Arbeit von L. FEJÉR, Über die Summabilität der LAPLACEschen Reihe durch arithmetische Mittel, *Mathematische Zeitschrift*, Bd. 24 (1925), S. 267—284, vgl. die Fussnoten [1] und [2].

§ 2

Beweis des Theorems C′.

1. Wegen der oben erwähnten Invarianz des Mittelwertes $\mathfrak{m}[\mathfrak{q}, \eta;\, s_n(\mathfrak{q}')]$ gegen Drehungen der Einheitskugel kann angenommen werden, dass der Punkt $\mathfrak{q}$, um den wir den Mittelwert bilden, mit dem Nordpol $\mathfrak{p}$ übereinstimmt.

Es sei

$$Y_\nu(\mathfrak{q}) = Y_\nu(\vartheta, \varphi) =$$
$$= a_\nu P_\nu(\cos\vartheta) + \sum_{\mu=1}^{\nu} (a_\nu^{(\mu)} \cos\mu\varphi + b_\nu^{(\mu)} \sin\mu\varphi)\, P_\nu^\mu(\cos\vartheta)$$

eine beliebige Kugelflächenfunktion ν-ter Ordnung (die $P_\nu^\mu(\cos\vartheta)$ bedeuten, wie üblich, die zugeordneten Funktionen). Der um den Nordpol $\mathfrak{p}$ gebildete lineare Mittelwert von $Y_\nu(\mathfrak{q}')$ ist dann gleich

$$\mathfrak{m}[\mathfrak{p}, \eta;\, Y_\nu(\mathfrak{q}')] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y_\nu(\eta, \varphi)\, d\varphi = a_\nu P_\nu(\cos\eta) = Y_\nu(0, \varphi)\, P_\nu(\cos\eta).$$

Bezeichnen wir also mit

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{16}$$

diejenige numerische Reihe, in welche unsere Reihe (7) in $\mathfrak{p}$ übergeht, so wird der um $\mathfrak{p}$ gebildete lineare Mittelwert von $s_n(\mathfrak{q}')$

$$\mathfrak{m}[\mathfrak{p}, \eta;\, s_n(\mathfrak{q}')] = a_0 P_0(\cos\eta) + a_1 P_1(\cos\eta) + \ldots + a_n P_n(\cos\eta),$$

d. h.

$$\mathfrak{m}\left[\mathfrak{p}, \frac{\xi}{n};\, s_n(\mathfrak{q}')\right] = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right).$$

2. Die Reihe (16) sei nun C_1-summierbar und ihre Summe $s = 0$. Wir setzen

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s_n,$$

so dass s_n mit dem Wert von $s_n(\mathfrak{q})$ im Nordpol übereinstimmt. Es sei ferner

$$s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n = S_n;$$

dann ist also

(17) $$S_n = o(n).$$

Man hat

$$\mathfrak{m}\left[\mathfrak{p}, \frac{\xi}{n}; s_n(\mathfrak{q}')\right] =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-2} S_\nu \left[P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) - 2P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) + P_{\nu+2}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right]$$
$$+ S_{n-1}\left[P_{n-1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) - 2P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right] + S_n P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n-2} S_\nu \left[P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) - 2P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) + P_{\nu+2}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right]$$
$$+ S_{n-1}\left[P_{n-1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) - P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right] + s_n P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right).$$

Es genügt nun, behaupte ich, folgende Tatsachen nachzuweisen:

a) $$\sum_{\nu=0}^{n-2} |S_\nu| \left|P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) - 2P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) + P_{\nu+2}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right| = o(1);$$

b) $$n\left|P_{n-1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) - P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right| = O(1).$$

In der Tat schliesst man hieraus

$$\mathfrak{m}\left[\mathfrak{p}, \frac{\xi}{n}; s_n(\mathfrak{q}')\right] = o(1) + o(1) + s_n P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) =$$
$$= s_n J_0(\xi) + s_n O\left(\frac{1}{n}\right) + o(1) = s_n J_0(\xi) + o(1),$$

weil doch wegen (17)

$$s_n = S_n - S_{n-1} = o(n)$$

ist.

3. Zu dem Beweis von *a)* und *b)* benutzen wir in wesentlichem Maße den Satz I. Es ist ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$)

(18)
$$P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) = P_\nu\left(\cos\frac{\frac{\nu}{n}\xi}{\nu}\right) =$$
$$= w_0\left(\frac{\nu}{n}\xi\right) + \frac{w_1\left(\frac{\nu}{n}\xi\right)}{\nu} + \frac{w_2\left(\frac{\nu}{n}\xi\right)}{\nu^2} + \frac{t(\nu, n, \xi)}{\nu^3},$$

wobei die Zahlen $t(\nu, n, \xi)$ dem absoluten Betrage nach sämtlich unterhalb einer festen, nur von ξ_0 abhängenden positiven Konstante bleiben. Dasselbe gilt für die im folgenden mit t_1 und t_2 bezeichneten Zahlen.

Hieraus folgt

$$P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)-2P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)+P_{\nu+2}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)=$$

$$=\left\{w_0\left(\frac{\nu}{n}\xi\right)-2w_0\left(\frac{\nu+1}{n}\xi\right)+w_0\left(\frac{\nu+2}{n}\xi\right)\right\}$$

$$+\frac{\xi}{n}\left\{\frac{w_1\left(\frac{\nu}{n}\xi\right)}{\frac{\nu}{n}\xi}-2\frac{w_1\left(\frac{\nu+1}{n}\xi\right)}{\frac{\nu+1}{n}\xi}+\frac{w_1\left(\frac{\nu+2}{n}\xi\right)}{\frac{\nu+2}{n}\xi}\right\}$$

$$+\frac{\xi^2}{n^2}\left\{\frac{w_2\left(\frac{\nu}{n}\xi\right)}{\left(\frac{\nu}{n}\xi\right)^2}-2\frac{w_2\left(\frac{\nu+1}{n}\xi\right)}{\left(\frac{\nu+1}{n}\xi\right)^2}+\frac{w_2\left(\frac{\nu+2}{n}\xi\right)}{\left(\frac{\nu+2}{n}\xi\right)^2}\right\}+\frac{t_1(\nu,n,\xi)}{\nu^3}$$

Beachten wir nun, dass $\frac{w_1(x)}{x}$ und $\frac{w_2(x)}{x^2}$ ganze Funktionen mit reellen Koefizienten sind, so liefert der Taylorsche Lehrsatz, dass die drei Ausdrücke in den geschweiften Klammern $\{\ \}$ dem absoluten Betrage nach kleiner bleiben als eine nur von ξ_0 abhängende positive Konstante, dividiert durch n^2. Folglich ist

$$\left|P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)-2P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)+P_{\nu+2}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right|<A\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{\nu^3}\right),$$

wo $A=A(\xi_0)$ nur von ξ_0 abhängt.

Wir bezeichnen jetzt mit ω eine feste positive ganze Zahl und wählen n so gross, dass $n-2>\omega$ ist. Die in *a)* auftretende Summe ist dann kleiner als

$$\sum_{\nu=1}^{\omega}|S_\nu|\left|P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)-2P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)+P_{\nu+2}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right|+$$

$$+\frac{A}{n^2}\sum_{\nu=\omega+1}^{n-2}|S_\nu|+A\sum_{\nu=\omega+1}^{n-2}\frac{|S_\nu|}{\nu^3}.$$

Die erste Summe strebt hier für $n\to\infty$ gegen 0, weil doch bei festem ν für $n\to\infty$

$$P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)-2P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)+P_{\nu+2}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\to 0$$

gilt. Die zweite Summe ist kleiner als

$$\varepsilon(\omega)\sum_{\nu=\omega+1}^{n-2}\nu<\varepsilon(\omega)\,n^2,$$

wenn $\varepsilon(\omega)$ die obere Grenze von $\frac{|S_\nu|}{\nu}$ für $\nu>\omega$ bezeichnet.

Die dritte ist schliesslich kleiner als

$$\varepsilon(\omega) \sum_{\nu=\omega+1}^{n-2} \frac{1}{\nu^2} < \frac{\pi^2}{6} \varepsilon(\omega).$$

Nun konvergiert aber $\varepsilon(\omega)$ für $\omega \to \infty$ gegen 0, womit *a)* bewiesen ist.

Um *b)* zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass aus (18)

$$P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) - P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) = w_0\left(\frac{\nu}{n}\,\xi\right) - w_0\left(\frac{\nu+1}{n}\,\xi\right) + \frac{t_2(\nu, n, \xi)}{\nu}$$

folgt. Für $\nu = n - 1$ ergibt sich hieraus die Behauptung unmittelbar.

Damit ist das Theorem C′ bewiesen.

§ 3.

Beweis des Theorems C″.

Man kann auch in diesem Falle annehmen, dass der Punkt $\mathfrak{q}$, um den der zweidimensionale Mittelwert zu bilden ist, mit dem Nordpol $\mathfrak{p}$ übereinstimmt. Es ist mit den gleichen Bezeichnungen wie in § 2

$$\mathfrak{M}[\mathfrak{p}, \eta; Y_\nu(\mathfrak{q}')] = \frac{1}{2\pi(1-\cos\eta)} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\eta} Y_\nu(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta\, d\vartheta \right\} d\varphi$$

$$= \frac{a_\nu}{1-\cos\eta} \int_0^{\eta} P_\nu(\cos\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Setzen wir also

$$(19) \quad \frac{1}{1-\cos\eta} \int_0^{\eta} P_\nu(\cos\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{1-\cos\eta} \int_{\cos\eta}^{1} P_\nu(t)\, dt = Q_\nu(\cos\eta)$$

($Q_\nu(x)$ ist ein Polynom ν-ten Grades), so handelt es sich um den Ausdruck

$$\mathfrak{M}\left[\mathfrak{p}, \frac{\xi}{n}; s_n(\mathfrak{q}')\right] = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, Q_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right).$$

Wir sehen hieraus, dass der Beweis ganz analog zu führen ist wie in § 2, mit dem einzigen Unterschied, dass die $P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)$ überall durch die $Q_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)$ zu ersetzen sind. Das einzige, was wir also nachzuweisen haben, ist eine analoge Grenzwertgleichung.

für $Q_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)$ wie (14), d. h.

$$Q_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)=w_0^*(\xi)+\frac{w_1^*(\xi)}{n}+\frac{w_2^*(\xi)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{20}$$

wo $w_0^*(x)$, $w_1^*(x)$, $w_2^*(x)$ ganze Funktionen sind, wo es ferner wesentlich ist, dass $w_1^*(x)$ und $w_2^*(x)$ für $x=0$ mindestens von der ersten bzw. zweiten Ordnung verschwinden.

Dieser Satz ist aus Satz I leicht herzuleiten, sogar mit dem Zusatze, dass (20) in ξ gleichmässig gilt, wenn $-\xi_0\leqq\xi\leqq\xi_0$ ist, wobei ξ_0 eine positive Zahl bedeutet.

Der Beweis in § 1, 1 zeigt nämlich, dass man das O-Glied in (14) in der Form $\xi^2 O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ schreiben kann.[9]) Man hat also

$$\begin{aligned}
Q_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)&=\frac{1}{1-\cos\frac{\xi}{n}}\int_0^{\frac{\xi}{n}}P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\\
&=\frac{1}{n\left(1-\cos\frac{\xi}{n}\right)}\int_0^{\xi}P_n\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right)\sin\frac{\vartheta}{n}\,d\vartheta\\
&=\frac{1}{n\left(1-\cos\frac{\xi}{n}\right)}\int_0^{\xi}\left(w_0(\vartheta)+\frac{w_1(\vartheta)}{n}+\frac{w_2(\vartheta)}{n^2}\right)\left(\frac{\vartheta}{n}-\frac{\vartheta^3}{6n^3}\right)d\vartheta+\\
&\qquad+\frac{\xi^2}{n\left(1-\cos\frac{\xi}{n}\right)}O\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&=\frac{1}{\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^4}{24n^2}}\int_0^{\xi}\left(w_0(\vartheta)+\frac{w_1(\vartheta)}{n}+\frac{w_2(\vartheta)}{n^2}\right)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^3}{6n^2}\right)d\vartheta+\\
&\qquad+\frac{\xi^2}{\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^4}{24n^2}}O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=\left(\frac{2}{\xi^2}+\frac{1}{6n^2}\right)\int_0^{\xi}\left(\vartheta w_0(\vartheta)+\frac{\vartheta w_1(\vartheta)}{n}+\frac{\vartheta w_2(\vartheta)-\frac{\vartheta^3}{6}w_0(\vartheta)}{n^2}\right)d\vartheta+O\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

---

[9]) Es folgt sogar, wie man leicht sieht, $\xi^4 O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. — Herr L. Kalmár macht mich aufmerksam, dass die Benutzung dieser Tatsache sich durch eine geringfügige Abänderung des im Texte stehenden Beweises vermeiden lässt.

Wir haben folglich

$$w_0^*(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \vartheta\, w_0(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{2}{x^2}\int_0^x \vartheta\, J_0(\vartheta)\, d\vartheta,$$

$$w_1^*(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \vartheta\, w_1(\vartheta)\, d\vartheta,$$

$$w_2^*(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\vartheta\, w_2(\vartheta) - \frac{\vartheta^3}{6} w_0(\vartheta)\right) d\vartheta + \frac{1}{6}\int_0^x \vartheta\, w_0(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Wegen Satz I sind nun $w_0^*(x)$, $w_1^*(x)$, $w_2^*(x)$ ganze Funktionen, man sieht ferner leicht, dass $w_1^*(x)$ und $w_2^*(x)$ an der Stelle $x=0$ von der zweiten bzw. vierten Ordnung verschwinden. Es gilt schliesslich

$$w_0^*(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{d}{d\vartheta}[\vartheta\, J_1(\vartheta)]\, d\vartheta = 2\frac{J_1(x)}{x},$$

womit der Satz C″ bewiesen ist.

Königsberg i. Pr., Mai 1928

(*Eingegangen am 1. Juni 1928*)

Über die Umkehrung eines Satzes aus der Variationsrechnung.

Von JULIUS SCHAUDER in Wien.

Herr HAAR hat für zweidimensionale Variationsprobleme einen dem bekannten DU BOIS REYMONDschen Lemma analogen Satz gefunden.[1]) Der Satz des Herrn HAAR lautet:

Satz: In einem einfach zusammenhängenden Bereiche G denken wir uns zwei messbare, beschränkte Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$[2]) gegeben. Wir behaupten:

Das Kurvenintegral $\int u dx - v dy$ genommen entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve C verschwindet immer dann, wenn für jede am Rande R des Gebietes G verschwindende, einer LIPSCHITZschen Bedingung genügende Funktion $\xi(x, y)$ die Beziehung

$$\iint_G \left[u(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial y} + v(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] dx\, dy = 0 \tag{1}$$

gilt.

Die Forderung des Verschwindens des Kurvenintegrales kann auch wie folgt ausgesprochen werden: Es gibt eine Hilfsfunktion $\omega(x, y)$, die einer LIPSCHITZschen Bedingung genügt, so dass die Gleichungen

$$u(x, y) = \frac{\partial \omega}{\partial x}; \quad v(x, y) = -\frac{\partial \omega}{\partial y} \tag{2}$$

---

1) A. HAAR, Über die Variation der Doppelintegrale, *Journal für r. u. a. Mathematik*, **146** (1919) S. 1—18. A. HAAR, Über das PLATEAUsche Problem, *Math. Annalen*, **97** (1927), S. 124—158. Vergleiche auch: L. LICHTENSTEIN, Bemerkungen über das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten, *Annales de la société polonaise de mathématique*, III (1924), S. 20—28.

2) Die Funktionen sollen auch bei der Annäherung an den Rand beschränkt bleiben.

bestehen. Der HAARsche Satz sagt also aus, dass aus (1) die Gleichungen (2) gefolgert werden können. Darüber hinaus wollen wir nun zeigen, dass hier auch die Umkehrung gilt, d. i. aus (2) folgt (1). Diese Umkehrung bleibt auch *für beschränkte mehrfach zusammenhängende Bereiche richtig, wobei der Rand ganz willkürlich angenommen werden kann und nicht etwa aus rektifizierbaren Kurven bestehen muss.* Der einfache Fall dieser Umkehrung, wenn die Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$ stetig sind und G durch eine reguläre Kurve berandet erscheint, wurde durch Herrn HAAR implizite bewiesen.[3])

Die so allgemein formulierte Umkehrung ermöglicht mir dann ohne weitere Hilfsmittel gewisse auf Herrn HAAR[4]) zurüchgehende Eindeutigkeitssätze[5]) regulärer Variationsprobleme in der Richtung zu verallgemeinern, dass als Grundbereich der zu beweisenden Eindeutigkeit beliebige beschränkte Gebiete angenommen werden können.

Endlich gelang es mir ein von Herrn RADÓ gestelltes Problem[6]) zwar nicht zu lösen, aber doch vorwärtszurücken.

* * *

Satz I. *In einem einfach zusammenhängenden Bereiche G denken wir uns zwei messbare, beschränkte Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$* [7]) *gegeben und behaupten:*

Das Kurvenintegral $\int\limits_C u\,dx - v\,dy$, genommen entlang einer ieden geschlossenen Kurve C, verschwindet dann und nur dann, wenn für jede am Rande R des Gebietes G verschwindende, einer LIPSCHITZ*schen Bedingung genügende Funktion $\xi(x, y)$ die Beziehung*

---

[3]) A. HAAR, Reguläre Variationsprobleme, *diese Acta*, III (1927), S. 224—231; vgl. insb. S. 229—230. Diese Umkehrung wurde durch Herrn HAAR an der erwähnten Stelle zwar nicht ausdrücklich ausgesprochen, sie folgt aber sofort aus dem Beweisgange. Die Methode von HAAR ist aber ohne weiteres nicht für allgemeine Bereiche gangbar.

[4]) Als weiteres Hilfsmittel benutzt Herr HAAR eine Verallgemeinerung eines STEINERschen Satzes über Minimalflächen.

[5]) L. c [3]).

[6]) T. RADÓ, Bemerkung über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme, *diese Acta*, II (1926), S. 147—156; vgl. insb. S. 149.

[7]) Diese Funktionen sollen auch bei Annäherung an den Rand beschränkt bleiben. Die Umkehrung, d. h. die Behauptung, dass aus (2) die Formel (1) folgt, gilt auch für mehrfach zusammenhängende Bereiche.

$$\iint\limits_G \left[u(x, y)\frac{\partial \xi}{\partial y} + v(x, y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] dx\, dy = 0 \tag{1}$$

gilt.

Beweis. Die Forderung des Verschwindens des Kurvenintegrales kann auch wie folgt ausgesprochen werden: Es gibt eine „LIPSCHITZsche“[8]) Hilfsfunktion $\omega(x, y)$, so dass die Gleichungen

$$u(x, y) = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad v(x, y) = -\frac{\partial \omega}{\partial y} \tag{2}$$

bestehen. Unser Satz sagt also die Äquivalenz von (1) und (2) aus.

Erstens: aus (1) folgt (2). Dies ist der unter [1]) zitierte Satz des Herrn HAAR, den wir der Vollständigkeit halber hier kurz beweisen wollen. Da der Bereich G als einfach zusammenhängend vorausgesetzt war, so genügt es, die Gleichungen (2) nur *im Kleinen* zu verifizieren. Man kann also G als das Quadrat mit den Eckpunkten $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ annehmen.

Wir betrachten das im Intervalle $(-1, +1)$ vollständige Orthogonalsystem der LEGENDREschen Polynome[9])

$$P_0 \equiv 1,\ P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots$$

und bilden

$$p_n(x) = \int\limits_{-1}^{x} P_n(x)\, dx. \tag{3}$$

Es ist bekanntlich $p_n(-1) = p_n(1) = 0$, für $n \geqq 1$. Jede der Funktionen $\xi_{m,n}$

$$\xi_{m,n}(x, y) = p_m(x)\, p_n(y) \quad (m \geqq 1,\ n \geqq 1) \tag{4}$$

verschwindet am Rande des Quadrates und ist eine LIPSCHITZsche Funktion. Da das Bestehen von (1) vorausgesetzt war, so haben wir

$$\iint\limits_G \left[u(x, y)\frac{\partial \xi_{m,n}}{\partial y} + v(x, y)\frac{\partial \xi_{m,n}}{\partial x}\right] dx\, dy = 0 \text{ für } m \geqq 1,\ n \geqq 1. \tag{5}$$

Das Integral (5) kann durch sukzessive teilweise Integration wie folgt umgeformt werden

---

[8]) Wir nennen eine Funktion kurz eine LIPSCHITZsche Funktion, wenn sie in allen Variablen einer LIPSCHITZschen Bedingung genügt.

[9]) Man kann auch im Falle *einer* Variablen die LEGENDREschen Polynome zum Beweise des DU BOIS REYMONDschen Lemmas benützen, wie dies Herr AUERBACH bemerkte.

$$
\begin{aligned}
0 &= \iint\limits_G \left[u\frac{\partial \xi_{m,n}}{\partial y} + v\frac{\partial \xi_{m,n}}{\partial x}\right] dx\,dy = \\
&= \int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1} [u p_m(x) P_n(y) + v P_m(x) p_n(y)]\, dx\,dy = \\
&= -\int\limits_{-1}^{+1} P_n(y)\,dy \int\limits_{-1}^{+1}\left(\int\limits_{-1}^{x} u(s,y)\,ds\right) P_m(x)\,dx - \\
&\quad -\int\limits_{-1}^{+1} P_m(x)\,dx \int\limits_{-1}^{+1}\left(\int\limits_{-1}^{y} v(x,s)\,ds\right) P_n(y)\,dy = \\
&= -\int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1}\left[\int\limits_{-1}^{x} u(s,y)\,ds + \int\limits_{-1}^{y} v(x,s)\,ds\right] P_m(x) P_n(y)\,dx\,dy = 0
\end{aligned} \tag{6}
$$

für $m \geqq 1$, $n \geqq 1$.

Denken wir uns jetzt im Quadrate G die Funktion

$$\varphi(x,y) = \int\limits_{-1}^{x} u(s,y)\,ds + \int\limits_{-1}^{y} v(x,s)\,ds \tag{7}$$

nach dem vollständigen Orthogonalsystem $\{P_m(x).P_n(y)\}$ entwickelt ($m \geqq 0$, $n \geqq 0$), so verschwinden wegen (6) alle Koofizienten $c_{m,n}$ dieser Entwicklung für $m \geqq 1$, $n \geqq 1$. D. h.

$$\varphi(x,y) \sim f(x) + \psi(y)$$

Wegen der Vollständigkeit folgt daraus

$$\varphi(x,y) = f(x) + \psi(y) \tag{8}$$

bis auf eine Nullmenge. Ich setze nun

$$\omega(x,y) = \int\limits_{-1}^{x} u(s,y)\,ds - \psi(y) \tag{9}$$

woraus man sofort auf

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = u(x,y) \tag{10}$$

fast überall schliesst. Weiter ergibt sich wegen (7) und (8)

$$\omega(x,y) = f(x) - \int\limits_{-1}^{y} v(x,s)\,ds \tag{11}$$

und dies zieht die Gleichung

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = -v(x,y) \tag{12}$$

nach sich. Da die Funktionen $u(x,y)$, $v(x,y)$ als beschränkt vorausgesetzt waren, so muss bekannterweise $\omega(x,y)$ stetig sein und sogar einer Lipschitzschen Bedingung genügen. Somit ist der Haarsche Satz bewiesen.

Es gibt mehrere Wege, die zur Verifikation des zweiten Teiles unserer Behauptung, für den Fall eines durch eine einfache geschlossene reguläre Jordankurve berandeten Bereiches G führen könnten. Nun wollen wir aber die verlangte Umkehrung für ganz allgemeine einfach oder auch mehrfach zusammenhängende Gebiete beweisen und da benötige ich einen Satz, der in meiner eben in den *Fundamenta Mathematicae* (Bd. XII) erscheinenden Arbeit „Über stetige Abbildungen" zu finden ist; diesen Satz möchte ich zunächst angeben.

Vermöge der LIPSCHITZschen Funktionen

$$\omega = \varphi(x, y), \quad \xi = \psi(x, y), \tag{13}$$

(φ, ψ LIPSCHITZsche Funktionen)

werde das in der (x, y)-Ebene gelegene Quadrat Q auf eine Menge in der (ω, ξ)-Ebene abgebildet. Das Zeichen für diese Abbildung sei der Buchstabe Φ; somit bezeichnet $\Phi(A)$ das Bild der Menge A. Insbesondere geht der Rand R des Quadrates in eine Bildkurve $\Phi(R)$ über. Für einen beliebigen nicht auf $\Phi(R)$ liegenden Punkt $P(\omega, \xi)$ mit den Koordinaten ω, ξ kann seine Ordnung $n(\omega, \xi)$ in bezug auf $\Phi(R)$ definiert werden; $n(\omega, \xi)$ ist eine summable Funktion. Es gilt dann:

$$\iint\limits_{Q} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \, dx \, dy = \iint n(\omega, \xi) \, d\omega \, d\xi, \tag{14}$$

wobei das rechtsstehende Integral über die ganze (ω, ξ)-Ebene zu erstrecken ist. Dies ist der eben erwähnte Satz.

Ich will jetzt zeigen, dass Formel (14) auf beliebige beschränkte Bereiche G [10]) verallgemeinert werden kann.[11]) Wir

---

[10]) Herr YOUNG hat in seinen Arbeiten eine andere Formel aufgestellt (siehe z. B. W. H. YOUNG, On a new set of conditions for a formula for an area, *Proc. London Math. Soc.* 21 (1922), S. 75—94). Seine Formel lautet:

$$\iint\limits_{Q} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \, dx \, dy = \int\limits_{\Phi(R)} \omega \, d\xi = \int\limits_{\Phi(R)} \xi \, d\omega; \tag{14'}$$

Die rechten Seiten von (14) und (14') stimmen also überein; in ganz einfachen Fällen hat dies schon Herr YOUNG bemerkt. Im Falle eines durch eine geschlossene, doppelpunktlose Kurve berandeten Bereiches könnte man — zum Beweise der Umkehrung — mit der Formel von YOUNG auskommen.

[11]) In meiner oben erwähnten Arbeit wurde nur der Fall des Quadrates betrachtet. Nach den nun folgenden Ausführungen kann man die dort behandelten Substitutionsformeln neuer Veränderlichen auch für allgemeine Bereiche entwickeln.

betrachten also den Fall eines *beliebigen* Gebietes G und setzen (13) im ganzen, *abgeschlossenen* G voraus. Man stelle jetzt G als Summe einer Folge von Quadraten $\{Q_m\}$ dar, die sich nirgends in *endlicher* Entfernung vom Rande R des Gebietes G häufen, und es bedeute r_m den Rand von Q_m. Weiter machen wir die einschränkende Annahme, dass der Rand R in eine Nullmenge $\Phi(R)$ übergeht. Ein Punkt $P(\omega, \xi)$, der auf keine der Mengen $\Phi(r_m)$, wie auch nicht auf $\Phi(R)$ zu liegen kommt, besitzt in bezug auf alle $\Phi(r_m)$ eine wohldefinierte Ordnung $n_m(\omega, \xi)$. Man setze[12])

$$n(\omega, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} n_m(\omega, \xi)\,; \tag{14*}$$

die Summe rechts hat für fast jeden Punkt $P(\omega, \xi)$ einen Sinn, da fast überall bei festem $P(\omega, \xi)$ nur endlich viele $n_m(\omega, \xi)$ von Null verschieden sind. Um dies einzusehen, bilde man die Funktion $N(\omega, \xi)$, die gleich ist der Anzahl der in G liegenden, vermöge der Abbildung Φ zu $P(\omega, \xi)$ gehörenden Urbilder. Auf ähnliche Weise definiere man die Funktionen $N_m(\omega, \xi)$, indem man nur diejenigen zu $P(\omega, \xi)$ gehörenden Urbilder zusammenfasst, die in Q_m liegen. Aus der Definition folgt, dass fast überall

$$N(\omega, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} N_m(\omega, \xi) \tag{15}$$

ist. Es bestehen nun die folgenden Gleichungen und Ungleichungen

$$|n_m(\omega, \xi)| \leqq N_m(\omega, \xi), \tag{16}$$

$$\iint\limits_G \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \right| dx\, dy = \iint N(\omega, \xi)\, d\omega\, d\xi,^{13)} \tag{17}$$

wo das rechtsstehende Integral über die ganze (ω, ξ)-Ebene zu erstrecken ist. Die Ungleichung (16) folgt aus Satz III meiner oben zitierten Arbeit.

Da wir ausdrücklich vorausgesetzt haben, dass die Funktionen φ, ψ auch *am Rande* R LIPSCHITZsche Funktionen sind, so existiert in (17) das linksstehende Integral, also auch das rechtsstehende; $N(\omega, \xi)$ ist summabel. Aus (14*), (15) und (16) folgt nun

$$|n(\omega, \xi)| \leqq N(\omega, \xi). \tag{18}$$

[12]) Eine andere Art der Definition der Funktion $n(\omega, \xi)$ als Summe der „Indexe" der zum Punkte $P(\omega, \xi)$ gehörenden Urbilder folgt aus meiner oben zitierten Arbeit (siehe insbesondere Satz III)

[13]) ST. BANACH, Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, *Fundamenta Mathematicae* 7 (1925), pp. 225–236, Theorem II und III.

Für jedes Q_m gilt nach (14)

$$\iint\limits_{Q_m} \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}\,dx\,dy = \iint n_m(\omega,\xi)\,d\omega\,d\xi \tag{19}$$

woraus wir durch Summation, wegen (14), (14*), (15), (16), (17),

$$\iint\limits_{G} \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}\,dx\,dy = \iint n(\omega,\xi)\,d\omega\,d\xi \tag{20}$$

erhalten.

Ich möchte gleich hier eine für die Anwendungen wichtige Bemerkung machen. Die Voraussetzung, dass die Funktionen φ, ψ auch am Rande der Lipschitzschen Bedingung genügen, lässt sich durch die folgende weniger fordernde ersetzen:

1⁰ φ, ψ sind in jedem ganz im Innern gelegenen Teilbereiche von G Lipschitzsche Funktionen,

2⁰ φ, ψ sind stetig im abgeschlossenen Bereiche $\bar{G}$,

3⁰ das Integral $\iint\limits_{G} \left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}\right| dx\,dy$ existiert,

4⁰ der Rand R geht in eine Nullmenge über.

Wir können jetzt sehr leicht den zweiten Teil unseres Satzes beweisen. Es soll also gezeigt werden, dass aus den Gleichungen (2) die Formel (1) folgt Dabei genügt es z. B., nach der eben gemachten Bemerkung, die stetige Funktion $\omega(x,y)$ nur in endlicher Entfernung vom Rande als eine Lipschitzsche Funktion vorauszusetzen, aber so, dass $\iint\limits_{G}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$ endlich bleibt.

Es sei jetzt $\xi(x,y)$ irgend eine am Rande R verschwindende, sonst denselben Bedingungen wie $\omega(x,y)$ genügende Funktion. Es ist dann wegen (2), nach (20),

$$\iint\limits_{G}\left[u\frac{\partial\xi}{\partial y} + v\frac{\partial\xi}{\partial x}\right] dx\,dy = \iint\limits_{G} \frac{\partial(\omega,\xi)}{\partial(x,y)}\,dx\,dy = \iint n(\omega,\xi)\,d\omega\,d\xi, \tag{21}$$

da nämlich — wegen der über $\omega(x,y)$ und $\xi(x,y)$ gemachten Voraussetzungen — das Integral $\iint\limits_{G}\left|\frac{\partial(\omega,\xi)}{\partial(x,y)}\right| dx\,dy$ existiert und da $\Phi(R)$ eine Nullmenge ist.[14])

Nun wollen wir zeigen, dass überall mit Ausnahme von $\Phi(R)$ $n(\omega,\xi)=0$ gilt. Denn zwei Punkte $P_1(\omega_1,\xi_1)$, $P_2(\omega_2,\xi_2)$, die durch

---

[14]) $\Phi(R)$ ist eine auf der ω-Axe liegende Strecke.

einen $\Phi(R)$ nicht schneidenden Linienzug verbunden werden können, besitzen in bezug auf $\Phi(R)$ dieselbe „verallgemeinerte" Ordnung: $n(\omega_1, \xi_1) = n(\omega_2, \xi_2)$. Dies sieht man sofort ein (und es ist auch bekannt), wenn $\Phi(R)$ ein System von Kurven ist. Um sich dieser Eigenschaft auch im allgemeinen Falle zu vergewissern, brauchen wir uns nur der Tatsache zu erinnern, dass der Bereich G als Summe einer Folge von Quadraten $\{Q_m\}$ dargestellt wurde, die sich in endlicher Entfernung von R nirgends häufen. Fassen wir also diejenigen Quadrate zusammen, die vom Rande eine Entfernung $> \frac{1}{r}$ haben, so bilden sie ein Gebiet G_r, dessen Rand R_r, welcher aus einer endlichen Anzahl von Kurven besteht, gleichmässig gegen R konvergiert. Der Linienzug, welcher die zwei festgewählten Punkte P_1, P_2 verbindet, wird also für genügend grosses r auch R_r nicht schneiden, also ist die Ordnung von P_1 und P_2 in bezug auf R_r dieselbe, woraus durch Grenzübergang $n(\omega_1, \xi_1) = n(\omega_2, \xi_2)$ folgt. Nun ist in unserem Falle $\Phi(R)$ — als Menge betrachtet — eine Strecke. Jeder nicht auf $\Phi(R)$ liegende Punkt lässt sich mit dem unendlichfernen Punkte durch einen Halbstrahl verbinden, ohne dabei $\Phi(R)$ zu passieren. Der unendlich ferne Punkt hat aber offensichtlich die Ordnung Null. Das Integral in (21) ist also Null, w. z. b. w.

Ich gebe jetzt einige Anwendungen dieser Umkehrung.

Satz II. *Vorgegeben eine mit ihren zweiten Ableitungen stetige Funktion $f(x, y, p, q)$. Das Funktionensystem $z(x, y)$, $\omega(x, y)$ genüge den Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} f_p\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial \omega}{\partial y} \\ f_q\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{aligned} \tag{22}$$

im Gebiete G. Betrachten wir dann eine Schar von Lipschitz*schen Funktionen $z_\varepsilon(x, y)$, die von einem Parameter ε abhängen, am Rande R mit $z(x, y)$ übereinstimmen und ist weiter*

$$\left|\frac{\partial z_\varepsilon(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\right| \leqq M \, . \, \varepsilon^\alpha, \quad \alpha > \frac{1}{2}, \tag{23}$$

so verschwindet die Ableitung $I'(0)$ der Funktion

$$I(\varepsilon) = \iint f\left(x, y, \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial y}\right) dx\, dy. \tag{24}$$

Beweis. Es ist

$$I(\varepsilon)-I(0)=\iint\limits_G\left[f\left(x,y,\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x},\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial y}\right)-f\left(x,y,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_G\left[f_p\left(x,y,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\right.$$

$$\left.+f_q\left(x,y,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]dx\,dy+ \tag{25}$$

$$+\iint\limits_G f_{pp}(x,y,\bar p_\varepsilon,\bar q_\varepsilon)\left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2f_{pq}(x,y,\bar p_\varepsilon,\bar q_\varepsilon)\left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+$$

$$+f_{qq}(x,y,\bar p_\varepsilon,\bar q_\varepsilon)\left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2dx\,dy,$$

wo $\bar p_\varepsilon(x,y)$, $\bar q_\varepsilon(x,y)$ zwischen $\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}$, bzw. zwischen $\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial y}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ liegen. Nun verschwindet das erste Integral rechts in (25) infolge des Satzes I. Das zweite Integral ist $<$ konst. $M\varepsilon^{2\alpha}$. Daraus folgt

$$\left|\frac{I(\varepsilon)-I(0)}{\varepsilon}\right|<\text{konst. } M\varepsilon^{2\alpha-1}, \tag{26}$$

woraus sich, wegen $2\alpha>1$, $I'(0)=0$ ergibt.

Bemerkung. Wir nehmen jetzt an, dass f von x, y nicht abhängt, also die Form $f(p,q)$ besitzt. Gelegentlich seiner Untersuchungen über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme hat Herr Radó folgende Gleichungssysteme

$$p^0f_q(p^0,q^0)=\frac{\partial\omega_1}{\partial x};\ f(p^0,q^0)-p^0f_q(p^0,q^0)=\frac{\partial\omega_1}{\partial y} \qquad 1^0$$

$$f(p^0,q^0)-q^0f_p(p^0,q^0)=\frac{\partial\omega_2}{\partial x};\ q^0.f_q(p^0,q^0)=\frac{\partial\omega_2}{\partial y} \qquad 2^0 \tag{27}$$

zu den Haarschen Gleichungen

$$f_q(p^0,q^0)=\frac{\partial\omega_3}{\partial x};\ f_p(p^0,q^0)=\frac{\partial\omega_3}{\partial y}, \qquad 3^0$$

hinzugefügt,[15]) wo mit $p^0(x,y)$, $q^0(x,y)$ die Ableitungen der Lösung $z^0(x,y)$ bezeichnet werden und $\omega_1(x,y)$, $\omega_2(x,y)$, $\omega_3(x,y)$ drei Hilfsfunktionen bedeuten. Er hat dann die Frage der Abhängigkeit dieser Systeme aufgeworfen; ist die Funktion $z(x,y)$ zweimal

[15]) T. Radó: Bemerkungen über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme, *diese Acta*, Bd. II (1926), S. 147—156.

differenzierbar, so ist die Antwort evident (vgl. l. c. [15]), insb. S. 149.) Ich werde nun zeigen:

Falls die ersten Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ *einer* HÖLDER*schen Bedingung mit einem Exponenten* $\alpha > \frac{1}{2}$ *genügen, so sind die zwei ersten Systeme vom dritten abhängig.*

Herr RADÓ wird nämlich zu den Systemen 1° und 2° geführt, indem er gewisse Variationsflächen $z_\varepsilon(x, y)$ betrachtet.[16]) Die Bedingung $I'(0) = 0$ ist dann mit dem Bestehen der Gleichungssysteme 1°, 2° gleichbedeutend. Nun kann man sich leicht überzeugen, dass in diesem Falle die Variationsflächen $z_\varepsilon(x, y)$ den im Satze II formulierten Bedingungen genügen. Also ist $I'(0) = 0$ und daraus folgt 1° und 2°

Auch gewisse Eindeutigkeitssätze regulärer Variationsprobleme können verallgemeinert werden.[17]) Nach dem Vorbilde der Theorie der Potentialfunktionen kann man fragen, ob die Lösung für beliebige beschränkte Gebiete eindeutig bestimmt ist. Dabei muss man über das Verhalten der partiellen Ableitungen der Lösung $z(x, y)$ in der Nähe des Randes gewisse Voraussetzungen machen. Es gilt der

S a t z III. *Wenn die stetigen Funktionen* $z(x, y)$, $\omega(x, y)$

1° *den Gleichungen* (22) *genügen,*

2° $f_{pp} > 0$, $f_{pp} \cdot f_{qq} - f_{pq}^2 > 0$ *ist,*

3° $z(x, y)$, $\omega(x, y)$ *in endlicher Entfernung vom Rande* LIPSCHITZ*sche Funktionen sind und*

$$\iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy < \infty$$

ist, so gibt es keine zweite, am Rande R mit $z(x, y)$ *übereinstimmende, Funktion* $\bar{z}$, *die denselben Bedingungen* 1°, 2°, 3° *genügt.*

B e w e i s. Man setze hier und im folgenden zur Abkürzung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q, \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \bar{p}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \bar{q},$$

und es bedeute weiter $\tilde{p}$ bzw. $\tilde{q}$ eine Zahl zwischen $p, \bar{p}$ bezw. $q, \bar{q}$. Für jede von $z(x, y)$ verschiedene Funktion $\bar{z}(x, y)$ gilt:

---

[16]) Ich verweise, was die Details anbetrifft, auf die unter [15]) zitierte Arbeit.

[17]) Siehe A. HAAR: Über reguläre Variationsprobleme, *diese Acta* Bd. III (1927), S. 224–234.

$$\begin{aligned}
&\iint_G \left[f(x,y,\bar p,\bar q) - f(x,y,p,q)\right] dx\,dy = \\
&= \iint_G \left[f_p(x,y,p,q)(\bar p - p) + f_q(x,y,p,q)(\bar q - q)\right] dx\,dy + \\
&+ \iint_G \left[f_{pp}(x,y,\tilde p,\tilde q)(\bar p - p)^2 + 2f_{pq}(x,y,\tilde p,\tilde q)(\bar p - p)(\bar q - q) + \right. \\
&\qquad \left. + f_{qq}(x,y,\tilde p,\tilde q)(\bar q - q)^2\right] dx\,dy.
\end{aligned} \tag{28}$$

Das zweite Integral rechts ist positiv, da das Problem laut 2^0 regulär ist. Des erste Integral rechts verschwindet aber wegen des Satzes I. Also gilt

$$\iint_G \left[f\left(x, y, \frac{\partial \bar z}{\partial x}, \frac{\partial \bar z}{\partial y}\right)\right] dx\,dy > \iint_G \left[f\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] dx\,dy \text{ [18]} \tag{29}$$

Wäre auch $\bar z(x,y)$ eine Lösung, so müsste auch die zu (29) umgekehrte Ungleichung gelten, was unmöglich ist.

Es wäre sicher sehr interessant, wenn man sich von der Bedingung 3^0 dieses Satzes befreien und die Eindeutigkeit der am Rande nur stetigen Lösungen zeigen könnte. Für Bereiche, die durch doppelpunktlose, rektifizierbare Kurven J berandet werden, kann man den folgenden weniger reichenden Satz aussprechen:

Satz III'. *Zwei stetige Lösungen z und $\bar z$, die am Rande übereinstimmen, sind identisch, wenn ihre Differenz einschliesslich des Randes einer* Lipschitz*bedingung genügt.*[19])

Beweis. Es sei $\{J_n\}$ eine Schaar im Innern unseres Bereiches gelegener Kurven, die gegen J gleichmässig konvergieren. Sei

$$\begin{matrix} x = x_n(t), & y = y_n(t) \\ x = x\,(t), & y = y\,(t) \end{matrix} \quad (0 \leq t \leq 1) \tag{30}$$

die Darstellung von J_n bzw. von J. Man setze noch zur Abkürzung

$$z - \bar z = \xi;$$

$$\omega(x_n(t),\ y_n(t)) = \omega_n(t);\ \xi(x_n(t),\ y_n(t)) = \xi_n(t). \tag{31}$$

Den Beweis wollen wir indirekt führen. Wir nehmen also die Existenz zweier verschiedener, am Rande übereinstimmender Lö-

---

[18]) Dieser Beweis ist so geführt worden, als ob $\iint_G f\left(x, y, \frac{\partial \bar z}{\partial x}, \frac{\partial \bar z}{\partial y}\right)$ existierte. Existieren aber die Integrale (29) nicht, so muss man nur einen ähnlichen Grenzübergang machen, wie beim nachfolgenden Satze III'.

[19]) Wir müssen auch annehmen, dass die entsprechenden Funktionen ω stetig sind.

sungen $z, \bar{z}$ an, deren Differenz $\xi(x, y)$ eine LIPSCHITZsche Funktion ist. Es gibt dann einen *ganz im Innern* gelegenen Bereich T, wo auch die Ableitungen verschieden sind. Sei G_n das Innere von J_n. Dann gilt

$$\begin{aligned}\iint_{G_n}\left[f(\bar{p}, \bar{q})-f(p, q)\right]dx\,dy= \\ =\iint_{G_n}\left[f_p(p, q)(\bar{p}-p)+f_q(p, q)(\bar{q}-q)\right]dx\,dy+ \\ +\iint_{G_n}\left[f_{pp}(\tilde{p}, \tilde{q})(\bar{p}-p)^2+2f_{pq}(\tilde{p}, \tilde{q})(\bar{p}-p)(\bar{q}-q)+\right. \\ \left.+f_{qq}(\tilde{p}, \tilde{q})(\bar{q}-q)^2\right]dx\,dy.\end{aligned} \tag{32}$$

Nun ist für genügend grosse $n > N$ der Bereich T in G_n enthalten, woraus

$$\begin{aligned}\iint_{G_n}\left[f(\bar{p}, \bar{q})-f(p, q)\right]dx\,dy \geqq \\ \geqq \iint_{G_n}\left[f_p(p, q)(\bar{p}-p)+f_q(p, q)(\bar{q}-q)\right]dx\,dy+\delta\end{aligned} \tag{33}$$

folgt, wenn wir

$$\begin{aligned}\delta=\iint_{T}\left[f_{pp}(\tilde{p}, \tilde{q})(\bar{p}-p)^2+2f_{pq}(\tilde{p}, \tilde{q})(\bar{p}-p)(\bar{q}-q)+\right. \\ \left.+f_{qq}(\tilde{p}, \tilde{q})(\bar{q}-q)^2\right]dx\,dy\end{aligned} \tag{34}$$

setzen. Wir beweisen jetzt

$$\lim \iint_{G_n}\left[f_p(p, q)(\bar{p}-p)+f_q(p, q)(\bar{q}-q)\right]dx\,dy=0. \tag{35}$$

In der Tat, es ist wegen (22), (31),

$$\iint_{G_n}[f_p(p, q)(\bar{p}-p)+f_q(p, q)(\bar{q}-q)]\,dx\,dy=\iint_{G_n}\frac{\partial(\omega, \xi)}{\partial(x, y)}dx\,dy. \tag{36}$$

Auf dieses Integral wenden wir die in Anmerkung [10]) zitierte Formel von YOUNG an und erhalten wegen (30), (31)

$$\iint_{G_n}\frac{\partial(\omega, \xi)}{\partial(x, y)}dx\,dy=\int_{J_n}\omega\,d\xi=\int_0^1\omega_n(t)\,d\xi_n=\int_0^1\omega_n(t)\,\xi_n'(t)\,dt. \tag{37}$$

Nun war die Differenz ξ als eine LIPSCHITZsche Funktion vorausgesetzt, d. h.

$$|\xi_n'(t)| \leqq M \quad (n=1, 2, \ldots, 0 \leqq t \leqq 1). \tag{38}$$

Weiter ist wegen der Stetigkeit der Funktion ξ

$$\xi_n(t) \to \xi(t)\,^{20)} \tag{39}$$

woraus für beliebige $t_1 < t_2$

$$\lim \int_{t_1}^{t_2} \xi_n'(t)\,dt = \lim(\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)) = \xi(t_2) - \xi(t_1) = 0 \tag{40}$$

folgt. (38) und (40) sagen aus, dass die Funktionen $\xi_n'(t)$ schwach gegen Null konvergieren, woraus wir auf

$$\lim \int_0^1 \omega_n(t)\,\xi_n'(t)\,dt = \lim \int_0^1 \omega(t)\,\xi_n'(t)\,dt = 0 \tag{41}$$

schliessen. Indem wir also in (33) zur Grenze übergehen, bekommen wir

$$\lim \iint_{G_n} [f(\bar{p}, \bar{q}) - f(p, q)]\,dx\,dy \geqq \delta > 0. \tag{42}$$

Es ist also für genügend grosses n

$$\iint_{G_n} f(\bar{p}, \bar{q})\,dx\,dy > \iint_{G_n} f(p, q)\,dx\,dy. \tag{43}$$

Da auch $\bar{z}$ eine Lösung ist, so müsste die auch umgekehrte Ungleichung bestehen, was unmöglich ist.

Wien, am 19. Februar 1928.

(Eingegangen am 22. Februar 1928)

[20]) $\xi(t) = \varphi[x(t), y(t)]$; $\omega(t) = \psi[x(t), y(t)]$.

Sur une inégalité de la théorie des fonctions

Par S. SAKS à Varsovie.

(Extrait d'une lettre à M. Tibor Radó).

...... Je me permets de vous communiquer les détails de la démonstration d'une inégalité se rattachant à la généralisation d'un résultat de LINDELÖF que vous avez donnée dans votre travail sur le prolongement des surfaces de RIEMANN.[1]) Je commence par établir deux propositions relatives aux fonctions subharmoniques[2]) et valables pour un nombre quelconque de variables. De ces deux propositions, je déduis une troisième, valable seulement pour le cas de deux variables, et qui correspond précisément à votre résultat mentionné plus haut.

1. Pour fixer les idées, je considère le cas de deux variables. Soient G un domaine (c'est-à-dire un ensemble ouvert) compris dans le cercle-unité K, C la circonférence de K, E l'ensemble des points communs à C et à la frontière de G. Soit de plus $u(\mathfrak{p})$ une fonction sous-harmonique dans G et A sa borne supérieure dans ce domaine.

Théorème. *Si $A<+\infty$ et si en tout point frontière* $\mathfrak{q}$ *de G intérieur à K*

$$\overline{\lim_{\mathfrak{p}\to\mathfrak{q}}}\, u(\mathfrak{p}) \leqq a \leqq A, \tag{1}$$

[1]) T. RADÓ, Über eine nicht fortsetzbare RIEMANNsche Mannigfaltigkeit, *Math. Zeitschrift* **20** (1924), S. 1—6; *voir* aussi T. RADÓ, Zu einem Satze von S. BERNSTEIN über Minimalflächen im Grossen, *Math. Zeitschrift* **26** (1927), S. 559—565.

[2]) Pour la définition, *voir* F. RIESZ, Sur les fonctions subharmoniques etc., *Acta Mathematica* **48** (1926), pp. 329—343.

alors on aura, en tout point $\mathfrak{p} = re^{i\theta}$ *de* G,

$$u(re^{i\theta}) \leqq \frac{a}{2\pi} \int\limits_{C-E} P(r, \lambda - \theta)\, d\lambda + \frac{A}{2\pi} \int\limits_{E} P(r, \lambda - \theta)\, d\lambda, \qquad (2)$$

où

$$P(r, \lambda - \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\lambda - \theta) + r^2}$$

En particulier, si le point $\mathfrak{p} = 0$ *appartient à* G,

$$u(0) \leqq \frac{a}{2\pi} \operatorname{mes}(C - E) + \frac{A}{2\pi} \operatorname{mes} E.$$ [3]

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. E étant un ensemble fermé, on peut l'enfermer dans un ensemble D composé d'un nombre fini d'arcs ouverts de C et tel que

$$\operatorname{mes}(D - E) < \varepsilon.$$

Posons, en tout point $\mathfrak{p} = re^{i\theta}$ intérieur à K,

$$U(\mathfrak{p}) = U(re^{i\theta}) = \frac{a}{2\pi} \int\limits_{C-D} P(r, \lambda - \theta)\, d\lambda + \frac{A}{2\pi} \int\limits_{D} P(r, \lambda - \theta)\, d\lambda.$$

La fonction $U(\mathfrak{p})$ ainsi définie est harmonique, et en vertu des propriétés connues de l'intégrale de Poisson, elle satisfait en tout point $\mathfrak{q}$ de D à la relation

$$\lim_{\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}} U(\mathfrak{p}) = A.$$

D'autre part, en vertu de l'inégalité $a \leqq A$, $U(\mathfrak{p})$ vérifie, à l'intérieur de K, l'inégalité

$$U(\mathfrak{p}) \geqq \frac{a}{2\pi} \int\limits_{C} P(r, \lambda - \theta)\, d\lambda = a.$$

On a donc en tout point frontière $\mathfrak{q}$ de G

$$\overline{\lim_{\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}}}\, u(\mathfrak{p}) \leqq \lim_{\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}} U(\mathfrak{p}).$$

$U(\mathfrak{p})$ étant une fonction harmonique et $u(\mathfrak{p})$ une fonction sous-harmonique, il en résulte, pour tout point $\mathfrak{p}$ de G, $u(\mathfrak{p}) \leqq U(\mathfrak{p})$, c'est-à-dire que

---

[3]) Cet énoncé n'exige que des modifications formelles pour le cas de plusieurs variables.

$$u(\mathfrak{p}) \leqq \frac{a}{2\pi} \int\limits_{C-D} P(r, \lambda - \theta)\, d\lambda + \frac{A}{2\pi} \int\limits_{D} P(r, \lambda - \theta)\, d\lambda.$$

Pour $\varepsilon \to 0$, cette inégalité se réduit à la relation (2) qu'il s'agissait de démontrer.

Corollaire 1. *Lorsque la circonférence C n'est pas contenue toute entière dans la frontière de G, la relation*

$$\lim_{\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}} u(\mathfrak{p}) = -\infty \tag{3}$$

ne saurait avoir lieu en tout point frontière $\mathfrak{q}$ de G intérieur à K, sans que l'on ait $u(\mathfrak{p}) = -\infty$ dans tout le domaine G.

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}_0$ un point quelconque de G. Désignons par K' un cercle concentrique et intérieur à K, par C' la circonférence de K' et par G' la partie de G contenue dans l'intérieur de K'; enfin, E' désignera l'ensemble des points communs à C' et à la frontière de G'. La fonction $u(\mathfrak{p})$ est évidemment bornée supérieurement dans G'. D'autre part, si la circonférence C' est assez voisine de C, le point $\mathfrak{p}_0$ sera compris dans G' et, de plus, l'ensemble $C' - E'$ ne sera pas vide. On sera alors en droit d'appliquer à G' et K' la formule (2) avec $a = -\infty$, ce qui fournit $u(\mathfrak{p}_0) = -\infty$.

2. Tandis que notre théorème et le corollaire 1 s'appliquent à un nombre quelconque de variables, il n'en sera pas de même pour le corollaire qui suit.

Corollaire 2. *Si G est simplement connexe et ne coïncide pas avec l'intérieur de K, la relation* (3) *ne saurait avoir lieu en tout point frontière $\mathfrak{q}$ de G intérieur à K, sans que l'on ait $u(\mathfrak{p}) = -\infty$ partout dans G.*

Pour le montrer, on reprendra l'artifice que vous avez employé l. c. [1]) et sur lequel vous avez bien voulu attirer mon attention dans votre dernière lettre. En supposant (ce qui est toujours admissible) que le point $r = 0$ appartienne à la frontière de G, on appliquera au domaine simplement connexe G la transformation $z' = \sqrt{z}$; le domaine G' obtenu par cette transformation vérifie alors les hypothèses du corollaire précédent.

Observons que la transformation $z' = \sqrt{z}$ joue un rôle essentiel dans ce raisonnement. En effet, le corollaire 2 n'est plus valable dans l'espace, comme on voit immédiatement sur l'exemple suivant. Soient K la sphère-unité et G le domaine formé des points intérieurs à cette sphère, exceptés ceux du segment $0 \leqq x \leqq 1$ de l'axe des x. Posons

$$u(x, y, z) = -\int_0^1 \frac{ds}{r}, \quad \text{où} \quad r^2 = (x-s)^2 + y^2 + z^2.$$

La fonction $u(x, y, z)$, ainsi définie, est harmonique dans tout le domaine G, tandis qu'elle tend vers $-\infty$ en tout point du segment en question, c'est-à-dire en tout point frontière de G intérieur à K.

3. En considérant la fonction sous-harmonique $\log|f(z)|$, où $f(z)$ désigne une fonction holomorphe dans G, on tire des propositions précédentes des énoncés relatifs aux fonctions analytiques. Ainsi, le corollaire 2 conduit immédiatement au lemme de votre travail cité au début: *G étant un domaine simplement connexe compris dans le cercle-unité K, qui ne coïncide pas avec l'intérieur de K, et $f(z)$ une fonction holomorphe dans G qui s'annulle en tout point frontière de G intérieur à K, on a $f(z) \equiv 0$.* Quant au théorème du n° **1** de cette lettre, on en déduit de suite l'énoncé suivant:

Théorème. *Soient G un domaine compris dans le cercle-unité K, C la circonférence de ce cercle, E l'ensemble des points communs à C et à la frontière de G, et $f(z)$ une fonction holomorphe dans G.*

Si $|f(z)| \leqq A < +\infty$ dans tout le domaine G, et si $\overline{\lim_{z \to t}} |f(z)| \leqq a \leqq A$ en tout point frontière t de G intérieur à K, on aura en tout point $z = re^{i\theta}$ de G

$$|f(z)| \leqq a^{\frac{1}{2\pi}\int_{C-E} P(r, \lambda-\theta)\, d\lambda} \cdot A^{\frac{1}{2\pi}\int_{E} P(r, \lambda-\theta)\, d\lambda}$$

où

$$P(r, \lambda-\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\lambda-\theta)+r^2}.$$

En particulier, si le point $z=0$ appartient à G, on aura

$$|f(0)| \leqq a^{\frac{1}{2\pi}\operatorname{mes}(C-E)} \cdot A^{\frac{1}{2\pi}\operatorname{mes} E}$$

D'ailleurs, cet énoncé n'est pas nouveau. Pour le cas où G est limité par une courbe simple n'admettant qu'un nombre fini d'arcs communs avec la circonférence C, ce théorème est démontré dans le recueil de problèmes de MM. Pólya et Szegő.[1]) Cependant, la démonstration de ces auteurs s'appuie sur la théorie de la représentation conforme et l'extension de cette démonstration au cas d'un domaine à frontière absolument générale semble nécessiter des considérations assez délicates. Ce n'est donc qu'à cause de la simplicité de la méthode que je viens d'exposer que je me suis permis de vous entretenir de ces détails.

Varsovie, le 1 mai 1928.

(Reçu le 5 mai 1928)

[1]) Pólya-Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II (Berlin, J. Springer, 1925), IV. Abschnitt, Aufgabe 134. S. 23.

p-adischer Beweis des zweiten Hauptsatzes von Herrn Ore.

Von Michael Bauer (Budapest) und Nikolaj Tschebotaröw (Kasan).

(Aus einem Briefwechsel zusammengestellt).

Der „zweite Hauptsatz" von Herrn Ö. Ore[1]), der erlaubt, ohne Kenntnis der Minimalbasis die Zerlegung *jeder* Primzahl auf Primidealfaktoren in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper zu erledigen, lässt sich sehr elementar mit Hilfe der Theorie p-adischer Zahlen von Herrn K. Hensel[2]) beweisen. Der Beweisgang erfolgt folgendermassen.

1. Es sei

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{1}$$
$$a_i \text{ rat.-ganz } (i = 1, 2, \ldots n), \; f(\omega) = 0$$

eine irreduzible Gleichung. Wir wollen eine rationale Primzahl p im Körper $K(\omega)$ in Primidealfaktoren zerlegen.

2. Zunächst wird $f(x)$ in p-adische irreduzible Faktoren zerlegt und so bekommt man die höchsten Primidealpotenzen. Ist $\Phi(x)$ ein p-adischer irreduzibler Faktor und

$$\Phi(x) = x^m + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_m \; (p), \tag{2}$$

dann ist

$$p = \mathfrak{p}^g . \mathfrak{Q}, \; (\mathfrak{p}, \mathfrak{Q}) = 1, \tag{3}$$

$$f \text{ Grad von } \mathfrak{p}, \; m = fg. \tag{4}$$

Der Faktor $\Phi(x)$ kann auch durch ein gewöhnliches Polynom ersetzt werden, das $\equiv \Phi (\text{mod } p^\alpha)$ ist, α genügend gross. Wir können demnach m durch eine endliche Anzahl von Operationen ermitteln.

---

1) Ö. Ore, Über den Zusammenhang zwischen u. s. w. II, *Math. Ann.* **97**, S. 585, Satz 9.

2) K. Hensel, Die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig, 1908.

3. Es ist bekannt, dass das Polynom $\Phi(x)$ im Körper $(p^f - 1)$-ter Einheitswurzeln in irreduzible Faktoren g-ten Grades zerfällt. Es kann andererseits bei keiner Adjunktion weiter zerfallen, wenn im erweiterten Rationalitätsbereich p nicht kritisch ist. Denn p enthält den Primidealfaktor in der g-ten Potenz (oder in HENSELschen Bezeichnungen: $\pi^g \sim p$). Wenn wir daher zu $K(p)$ einen Oberkörper von $K(p, \alpha)$, $(\alpha^{p^f-1} - 1 = 0)$ adjungieren, dessen Diskriminante relativ prim zu p ist, so zerfällt $\Phi(x)$ in irreduzible Polynome vom genau g-ten Grade. Der Körper $K(p, \beta)$, $(\beta^{p^m-1} - 1 = 0)$ genügt aber diesen Bedingungen. Um also g zu finden, genügt es den Grad von Teilern des Polynoms $\Phi(x)$ zu bestimmen, die im Körper $K(p, \beta)$ irreduzibel sind, wobei β eine primitive $(p^m - 1)$-te Einheitswurzel ist. Dies kann man auch durch eine endliche Anzahl von Operationen ermitteln.

(*Eingegangen am 21. Juni 1928*)

Sur la convergence en moyenne.

Par FRÉDÉRIC RIESZ à Szeged.

1. Considérons la classe L^p, où $p>1$, des fonctions $f(x)$ définies sur un ensemble mesurable E et sommables sur cet ensemble ainsi que la p-ième puissance de leur module. Quant à la convergence des suites $\{f_n\}$ de telles fonctions, on distingue, outre la convergence effective, c'est-à-dire convergence point par point et partout ou presque partout, deux autres types de convergence, ne dépendant que des intégrales et dont l'idée s'est montrée très féconde pour l'étude des classes L^p. Ce sont la convergence *en moyenne,* dite aussi convergence *forte,* et la convergence *faible.* On dit que la suite $\{f_n\}$ converge en moyenne (d'ordre p) vers la fonction limite f lorsque, f et les f_n appartenant à la classe L^p, on a, pour n infini,

$$\int_E |f-f_n|^p\,dx \to 0. \tag{1}$$

De cette hypothèse, et en se servant des inégalités bien connues qui s'attachent aux noms de CAUCHY, SCHWARZ, HÖLDER et MINKOWSKI, on déduit immédiatement que la suite $\{f_n\}$ jouit des propriétés suivantes:

a) on a, pour toute fonction g appartenant à la classe $L^{p/p-1}$:

$$\int_E f_n g\,dx \to \int_E fg\,dx$$

b) on a

$$\int_E |f_n|^p\,dx \to \int_E |f|^p\,dx.$$

Passons à la convergence faible. La convergence faible (d'ordre p) peut être caractérisée par l'hypothèse *a),* sans exiger la propriété *b).* Donc les suites convergentes en moyenne convergent aussi faiblement; mais la convergence faible est plus générale que la convergence en moyenne. Ainsi par exemple, la suite des fonctions $f_n(x) = \sin nx$ et la fonction $f(x) = 0$ satisfont à l'hypothèse *a)* c'est-à-dire que la suite converge faiblement vers zéro sur tout intervalle fini et de tout ordre p, tandis que la relation *b)* est évidemment en défaut.

Dans la note présente, nous nous proposons de montrer que la relation *b)* est justement caractéristique pour la convergence en moyenne; d'une façon précise, nous allons montrer que *toute suite $\{f_n\}$ convergeant faiblement (d'ordre p) vers une fonction limite f et satisfaisant de plus à la relation b), converge aussi en moyenne (d'ordre p) vers la même fonction f.* En d'autres termes, l'ensemble des relations *a)* et *b)* est équivalent à la relation (1).

2. Voyons d'abord, à titre d'exemple, le cas particulier où $p = 2$. Dans ce cas, on a

$$\int_E |f - f_n|^2 dx = \int_E |f|^2 dx - \int_E \bar{f} f_n dx - \int_E f \bar{f}_n dx + \int_E |f_n|^2 dx.$$

D'après l'hypothèse *a)*, la seconde intégrale figurant au second membre tend, pour n infini, vers $\int |f|^2 dx$, c'est-à-dire vers la première et il en sera de même quant à la troisième intégrale dont les valeurs sont conjuguées à celles de la seconde; enfin, la quatrième des intégrales figurant au second membre converge aussi vers la première et cela par l'hypothèse *b)*. En résumé, on obtient

$$\int_E |f - f_n|^2 dx \to 0,$$

c. q. f. d.

3. Le cas général d'un $p > 1$ quelconque exige une analyse plus délicate. Commençons par démontrer le lemme suivant:

Lorsque, f et les f_n appartenant à la classe L^p, les f_n convergent vers f presque partout sur E et que, de plus,

$$(2) \qquad \int_E |f_n|^p dx \to \int_E |f|^p dx,$$

on aura aussi

$$(1) \qquad \int_E |f - f_n|^p dx \to 0.$$

Brièvement, la convergence effective et l'hypothèse *b)* entraînent la convergence en moyenne. Pour le voir, désignons par f_n^* la fonction égale à f_n partout où $|f_n| \leq |f|$ et égale à

$$|f|\operatorname{sgn} f_n = f_n \left|\frac{f}{f_n}\right|$$ [1])

ailleurs. La suite des fonctions f_n^* tend presque partout vers la fonction f et reste, en module, au-dessous de cette fonction ; il s'ensuit, d'après le théorème de M. Lebesgue, que

(3) $$\int_E |f_n^*|^p\, dx \to \int_E |f|^p\, dx$$

et que

(4) $$\int_E |f - f_n^*|^p\, dx \to 0.$$

De plus, par la définition des f_n^*, on a

$$|f_n - f_n^*| = |f_n| - |f_n^*|$$

et par conséquent

$$|f_n - f_n^*|^p \leqq |f_n|^p - |f_n^*|^p,$$

ce qui donne, en tenant compte des relations (2) et (3),

$$\int_E |f_n - f_n^*|^p\, dx \leqq \int_E |f_n|^p\, dx - \int_E |f_n^*|^p\, dx \to 0.$$

Enfin, en comparant les relations (4) et (5) et en appliquant l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$\int_E |f - f_n|^p\, dx \leqq \left\{\left[\int_E |f - f_n^*|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_E |f_n - f_n^*|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}}\right\}^p \to 0,$$

c. q. f. d.

4. Ces préliminaires établis, nous sommes à même de démontrer notre théorème général.

Lorsque la suite $\{f_n\}$ converge faiblement d'ordre p vers la fonction f et que, de plus,

$$\int_E |f_n|^p\, dx \to \int_E |f|^p\, dx,$$

alors la suite $\{f_n\}$ converge aussi en moyenne et du même ordre p vers la même fonction f.

Pour démontrer ce théorème, observons tout d'abord que le cas où

$$\int_E |f|^p\, dx = 0,$$

---

[1]) Nous convenons de poser $\operatorname{sgn} z = \frac{z}{|z|}$ lorsque $z \neq 0$ et $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

est évident. Dans tout autre cas, on pourra supposer, par raison d'homogénéité, que

(6) $$\int_E |f|^p\,dx = 1\,;\ \int_E |f_n|^p\,dx \to 1.$$

Cela étant, posons

$$g_n = f_n |f|^{p-1} \operatorname{sgn} \bar{f}.$$

La fonction $|f|^{p-1}\operatorname{sgn}\bar{f}$ appartenant à la classe $L^{p/p-1}$, on aura, d'après l'hypothèse *a)*,

(7) $$\int_E g_n\,dx \to \int_E f|f|^{p-1}\operatorname{sgn}\bar{f}\,dx = \int_E |f|^p\,dx = 1.$$

D'autre part, l'inégalité Schwarz-Hölder donne

(8) $$\left|\int_E g_n\,dx\right| \leqq \int_E |g_n|\,dx =$$
$$= \int_E |f_n|\,|f|^{p-1}\,dx \leqq \left[\int_E |f_n|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_E |f|^p\,dx\right]^{\frac{p}{p-1}} \to 1.$$

En comparant (7) à (8), il vient que

(9) $$\int_E |g_n|\,dx \to 1.$$

Envisageons maintenant l'intégrale

(10) $$I_n(t) = \int_E |f|^{pt}\,|f_n|^{p(1-t)}\,dx,$$

dépendant du paramètre t variant sur l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$. Les formules (6) et (9) nous affirment que

$$I_n(1) = 1,\ I_n(0) \to 1,\ I_n\left(\frac{p-1}{p}\right) \to 1.$$

D'autre part, d'après l'inégalité Schwarz-Hölder, $\log I_n(t)$ est une fonction convexe de t. Cette fonction allant, pour n infini et pour $t = 0, \frac{p-1}{p}, 1$, c'est-à-dire pour trois valeurs différentes de t, vers la même limite $= 0$, il en sera de même pour toutes les autres valeurs de t et en particulier pour $t = 1/2$. C'est-à-dire que

$$\int_E |f|^{1/2 p}\,|f_n|^{1/2 p} \to 1$$

et que, par conséquent,

$$\int_E (|f|^{1/2p} - |f_n|^{1/2p})^2\, dx = \int_E |f|^p\, dx - 2\int_E |f|^{1/2p} |f_n|^{1/2p}\, dx + \int_E |f_n|^p\, dx \to 0.$$

Cela nous dit que la suite des fonctions $|f_n|^{1/2p}$ converge en moyenne (d'ordre 2) vers la fonction $|f|^{1/2p}$. Il s'ensuit, d'après un théorème connu,[2]) qu'il existe une suite partielle tendant point par point, presque partout, vers la fonction $|f|^{1/2p}$ ou ce qui revient au même, les fonctions $|f_n|$ tendent, après un choix convenable des indices n et presque partout, vers la fonction $|f|$. Pour la suite choisie, on aura donc presque partout,

(11) $$|g_n| = |f_n|\,|f|^{p-1} \to |f|^p.$$

Voilà que, par un choix convenable des indices, nous sommes arrivés à remplacer la convergence faible par une convergence effective des modules $|f_n|$. Il s'agira dès maintenant de nous assurer, par un nouveau choix d'indices, de la convergence effective des fonctions f_n elles-mêmes.

Dans ce but, écrivons

$$g_n = \gamma_n^2 = (\varphi_n + i\psi_n)^2 = \varphi_n^2 - \psi_n^2 + 2i\varphi_n\psi_n,$$

où nous avons choisi pour γ_n une détermination mesurable de la racine carré de g_n et mis en évidence les parties réelle et imaginaire de γ_n.

En rappelant les formules (7) et (9) on reconnaît que

$$\int_E (\varphi_n^2 - \psi_n^2)\, dx = \int_E \Re(g_n)\, dx \to 1\,; \int_E (\varphi_n^2 + \psi_n^2)\, dx = \int_E |g_n|\, dx \to 1$$

et que, par conséquent,

$$\int_E \psi_n^2 dx \to 0.$$

On pourra donc obtenir, par un second choix convenable, que les ψ_n convergent vers zéro presque partout. Ce choix fait, on aura, presque partout,

$$|g_n| - \Re(g_n) = 2\psi_n^2 \to 0\,;$$

il s'ensuit, par la formule (11), que l'on a presque partout,

$$g_n \to |f|^p$$

---

[2]) B. Levi, Sul principio di Dirichlet, *Rendiconti di Palermo*, **22** (1906), pp. 293—360; F. Riesz, Sur les suites de fonctions mesurables, *Comptes rendus*, Paris, **148** (1909), pp. 1303—1305; H. Weyl, Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten, *Math. Annalen*, **67** (1909), pp. 225—245.

et de là il vient, par la définition de g_n, que l'on a presque partout

$$f_n \to f.$$

Donc, en appliquant le lemme établi au n° **3**, on conclut que l'on a, pour notre suite partielle,

$$\int_E |f-f_n|^p\, dx \to 0.$$

C'est-à-dire que, de toute suite $\{f_n\}$ satisfaisant aux hypothèses *a)* et *b)*, on peut extraire une suite partielle convergeant en moyenne (d'ordre p) vers la fonction f.

Supposons maintenant, par impossible, que la suite $\{f_n\}$, tout en satisfaisant aux hypothèses *a)* et *b)*, ne converge pas en moyenne (d'ordre p) vers la fonction f, c'est-à-dire que l'on ait

$$\overline{\lim} \int_E |f-f_n|^p\, dx = \lambda > 0.$$

Cela posé, il existera une suite partielle des f_n, telle que

$$\int_E |f-f_n|^p\, dx > \frac{\lambda}{2};$$

d'autre part, cette suite partielle satisfaisant, à plus forte raison, aux hypothèses *a)* et *b)*, elle devrait contenir, d'après ce que nous venons de voir, une nouvelle suite telle que

$$\int_E |f-f_n|^p\, dx \to 0,$$

ce qui implique contradiction. La démonstration est donc achevée.

5. Ajoutons encore quelques mots concernant la classe H^p des points $X=\{x_k\}$ à une infinité dénombrable de coordonnées et tels que la série $\Sigma |x_k|^p$ soit convergente. On sait que les classes L^p et H^p, outre la correspondance réelle bien connue qui existe entre elles dans le cas où $p=2$, montrent aussi dans les autres cas une analogie presque complète. Je dis *presque* complète et il ne sera pas sans intérêt d'envisager à ce point de vue le théorème que nous venons de démontrer. L'analogue de notre théorème pour la classe H^p fut établi par M. Hildebrandt dès 1912;[3])

[3]) T. H. Hildebrandt, Necessary and sufficient conditions for the interchange of limit and summation in the case of sequences of infinite series of a certain type, *Annals of Mathematics*, second series, **14** (1912—1913), pp. 81—83. Cf. aussi F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris, 1913, pp. 58—59.

il affirme que *les relations*

$$x_k^{(n)} \to x_k \, (k=1,2,\ldots); \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^p \to \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$$

entraînent la relation

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(n)}|^p \to 0.$$

Mais ce théorème est aussi l'analogue de notre lemme dans lequel nous avons admis la convergence effective au lieu de la convergence faible. Voilà la différence essentielle entre l'étude de la classe H^p et celle de L^p; pour la première, la convergence forte et même la convergence faible, dont nous n'avons pas besoin de rappeler les définitions, impliquent toujours la convergence effective; mais il est loin d'être ainsi pour la seconde; en effet, pour la classe L^p, en cas de convergence faible, on ne pourra même pas affirmer l'existence d'une suite partielle convergeant effectivement. Voilà pourquoi notre théorème passait inaperçu plus longtemps que celui de M. Hildebrandt.

(Reçu le 28 april 1928)

Zur Theorie der abstrakten Spiele.

Von LÁSZLÓ KALMÁR in Szeged.

Einleitung.

Ich werde mich mit solchen Spielen beschäftigen, welche von zwei Spielern durch abwechselnde Züge geführt werden, deren Wahl und Durchführbarkeit nur von dem Entschlusse des am Zuge befindlichen Spielers bzw. von den Spielregeln, aber keineswegs vom Zufall oder von der Handfertigkeit des Spielers abhängt, und welche der Reihe nach Positionen herbeiführen, die beiden Spielern vollständig bekannt sind (Spiele von der Art der Kartenspiele werden also durch diese Festsetzung ausgeschlossen). Das bekannteste Beispiel bietet das Schachspiel; andere Beispiele: das Damenspiel, Mühlenspiel, Nimspiel.[1]) Zur Illustration einiger nicht ganz einfacher Möglichkeiten, die bei einem Spiele vorkommen können, ist die folgende Verallgemeinerung des letztgenannten Spiels sehr geeignet Es sei eine wohlgeordnete Menge $\mathfrak{M}$ gegeben; als Positionen des zu definierenden Spiels, des „zur Menge $\mathfrak{M}$ gehörigen Nimspiels", sollen die endlichen Folgen von nicht notwendig verschiedenen Elementen der Menge $\mathfrak{M}$ gelten. Die Spielregeln lauten: der Spieler, der am Zuge ist, macht einen Zug indem er ein beliebiges Element μ der Folge durch ein anderes Element μ' von $\mathfrak{M}$, welches in der Wohlordnung von $\mathfrak{M}$ vor μ steht, ersetzt Kann er das nicht (kommt also in der Position nur das erste Element von $\mathfrak{M}$ vor), so hat er das Spiel verloren.

Die Fragestellungen, welche ich beantworten werde, schliessen sich sehr eng an den, dem praktischen Schachspielern geläufigen

[1]) Betreffend des Nimspiels vgl. z. B. W. AHRENS, Mathematische Spiele, *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. I_2. (1900—94), Art. I. G. 1., S. 1092.

Begriff: „eine Position, bei welcher der eine Spieler auf Gewinn (Verlust) steht". Dass dieser Begriff mathematisch-präzis gefasst werden muss und kann, hat Herr ZERMELO in einem sehr inhaltsvollen Vortrag[2]) erkannt.

Herr ZERMELO hat für die Spiele, bei welchen, wie z. B. bei dem Schachspiele, die Anzahl ν aller möglichen Positionen endlich ist, u. A. bewiesen, dass, wenn der eine Spieler A in einer Position q auf Gewinn steht, eine Taktik für ihn vorhanden ist, durch welche er gewiss in weniger als ν Zügen gewinnt. Der Beweis beruht wesentlich auf der Tatsache, dass A, falls er in der Position q auf Gewinn steht, durch Befolgung einer geeigneten Taktik „ohne Wiederholung", d. h. so gewinnen kann, dass, wie auch der Gegner spielen mag, niemals eine Partie entsteht, in der dieselbe Position mehr als einmal vorkommt. Diese letztere, gar nicht selbstverständliche Tatsache wurde durch Herrn ZERMELO nicht bewiesen, wodurch, wie Herr KÖNIG bemerkt hat,[3]) eine Lücke des ZERMELOschen Beweises entsteht. Daher hat Herr KÖNIG, angeregt durch eine mündliche Bemerkung des Herrn v. NEUMANN, statt des erwähnten Satzes des Herrn ZERMELO einen Satz bewiesen, der nicht nur die Spiele mit endlich vielen Positionen erfasst, sondern überhaupt alle Spiele, bei denen aus irgendeiner Position q durch einen regelrechten Zug nur je eine endliche Anzahl $\mu = \mu(q)$ von neuen Positionen entstehen kann. Der fragliche Satz lautet: zu jeder Position q, in der A auf Gewinn steht, gibt es eine natürliche Zahl ν_q, so dass A, von q ausgehend, den Gewinn in höchstens ν_q Zugpaaren erzwingen kann. Durch Anwendung dieses Satzes hat dann Herr ZERMELO die oben erwähnte Lücke ausgefüllt,[4]) indem er, ohne die Möglichkeit des Gewinns ohne Wiederholung heranzuziehen, bewies, dass bei Spielen mit endlich vielen Positionen die Zahl ν_q stets kleiner als die Gesamtanzahl der Positionen ist.

Ich werde nun, im Gegensatze zu einer von Herr KÖNIG a. a. O. ausgesprochenen Vermutung zeigen, dass auch der ursprüngliche Gedankengang des Herrn ZERMELO unmittelbar zu einem

---

2) E. ZERMELO, Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, *Proceedings of the fifth International Congress of Mathematicians* (Cambridge, 1912), Bd. 2., S. 501–504.

3) D. KÖNIG, Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche, *diese Acta*, Bd. 3., (1927), S. 121–130.

4) D. KÖNIG, a. a. O.3), Zusatz auf den Seiten 129–130.

einwandfreien Beweise ergänzt werden kann; ich kann nämlich, auch ohne die Endlichkeit der Menge der aus einer festen Position durch einen regelrechten Zug erreichbaren Positionen vorauszusetzen, ja ohne irgendwelche Endlichkeitsvoraussetzungen, die Möglichkeit des Gewinns ohne Wiederholung beweisen. Dabei mache ich von dem Satze des Herrn König weder explizite, noch implizite Gebrauch: sowohl der Satz selbst, wie auch die Beweismethode des Herrn König sind ja wesentlich an eine Endlichkeitsvoraussetzung gebunden.

Es ist zu beachten, dass eine Taktik des A gar nicht so beschaffen sein muss, dass der Umstand, ob ein Zug $q \to q'$ des A der Taktik entspricht oder nicht, nur von den Positionen q, q abhängt; es ist sehr wohl möglich, dass es auch von der Vorgeschichte der Partie, in der q vorkommt, abhängig ist. Eine Taktik, die doch so beschaffen ist, nenne ich eine Taktik im engeren Sinne. Nun werde ich den Satz beweisen, dass, falls A in der Position q auf Gewinn steht, es für ihn auch eine Taktik in engerem Sinne gibt, die gewiss zum Gewinn führt.[5]) Daraus wird natürlich wieder der (im Texte schon früher viel einfacher zu beweisende) Satz über Gewinn ohne Wiederholung folgen. Die Existenz einer Gewinntaktik in engerem Sinne werde ich durch die Anwendung der Theorie der transfiniten Zahlen beweisen,[6]) und zwar auf dem Umwege einer Verallgemeinerung des Satzes des Herrn König.

Wie ich schon erwähnt habe, gilt der Satz des Herrn König nicht ohne die zugehörige Endlichkeitsvoraussetzung. In der Tat, man betrachte z. B. die Position $\{\omega, \omega\}$[7]) bei dem zur Menge $\mathfrak{M} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$ gehörigen Nimspiele.[8]) In dieser Position

[5]) Wie Herr König, a. a. O.[3]), S. 127. erwähnt, kann er diesen Satz, natürlich auch nur im Spezielifalle, wenn die auch zur Gültigkeit seines erwähnten Satzes nötigen Endlichkeitsvoraussetzungen erfüllt sind, durch graphentheoretische Methoden beweisen.

[6]) Wenn es sich nur um den Beweis diesen Satzes handelt, kann man die Anwendung der transfiniten Zahlen durch die geistreiche Methode umgehen, die Herr Kuratowski zur Vermeidung der transfiniten Induktion in sehr allgemeinen Fällen gegeben hat. (C. Kuratovski, Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques, *Fundamenta Mathematicae*, Bd. 3., S. 76—108) Ein einfacher Beweis dieser scheinbar so naheliegenden Tatsache lässt sich aber auch in dieser Weise nicht erzielen.

[7]) Hier bezeichnet ω üblicherweise die kleinste transfinite Ordungszahl.

[8]) Das zu einer wohlgeordneten Menge $\mathfrak{M}$ gehörige Nimspiel wurde am Anfange dieser Einleitung definiert.

steht offenbar derjenige Spieler A auf Gewinn, der nicht am Zuge ist. Er hat nämlich, um zu gewinnen, auf den Zug $\{\omega, \omega\} \to \{\mu, \omega\}$ des Gegners $\{\mu, \omega\} \to \{\mu, \mu\}$, dann auf $\{\mu, \mu\} \to \{\mu, \mu'\}$ $\{\mu, \mu'\} \to \{\mu', \mu'\}$ usw. erwidern. Und das ist auch der einzige Weg für ihn, um sicher zu gewinnen; weicht er davon ab, so kann sein Gegner B das Spiel in analoger Weise zum Gewinn führen. Man sieht auch, dass B, wie gross auch die natürliche Zahl ν sein mag, den Verlust bis zum $\nu+1$-ten Zugpaare verschieben kann, dadurch nämlich, dass er zunächst $\{\omega, \omega\} \to \{\nu, \omega\}$ zieht und dann, wenn A die oben angegebene Taktik befolgt, immer nur „kürzeste" Züge von der Form $\{\xi, \xi\} \to \{\xi, \xi-1\}$ macht: also kann A in der Position $\{\omega, \omega\}$ die Höchstanzahl der zum Gewinn nötigen Züge nicht voraussagen.

Ich werde doch, in Verallgemeinerung des Satzes des Herrn König, beweisen, dass es sich bei jedem Spiele (ohne irgendeine Endlichkeitsvoraussetzung) zu jeder Position q, in der A auf Gewinn steht, eine, eventuell transfinite, *Ordnungszahl* ν_q zuordnen lässt, die als Verallgemeinerung der durch den Satz des Herrn König gesicherten *natürlichen Zahl* ν_q anzusehen ist[9]) So gehört z. B. zur erwähnten Position $\{\omega, \omega\}$ die transfinite Zahl ω, wie überhaupt zu jeder Position eines Spiels, in welcher der Spieler A, der auf Gewinn steht, die Höchstanzahl der zum Gewinn nötigen Züge zwar sofort nicht, jedoch schon nach dem nächsten Zuge des Gegners angeben kann. Ebenso gehört z. B. die transfinite Zahl $\omega+\mu$ (μ endlich) zu jeder Position, in der A nach $\mu+1$, aber nicht sicher nach weniger Zugpaaren imstande sein wird, eine von den inzwischen gemachten Zügen des Gegners abhängige Höchstanzahl der zum Gewinn noch nötigen Züge anzugeben. Die transfinite Zahl $\omega.2=\omega+\omega$ gehört zu jeder Position, in der A auch schon die obige Zahl μ nicht sofort, sondern erst nach dem nächsten Zuge des Gegners angeben kann. Für die transfinite Zahl ω^2 ist die Sache noch etwas verwickelter und kann durch die Position $\{\omega^2, \omega^2\}$ des zur Menge

$$\{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \omega.2, \ldots, \omega.3, \ldots, \omega^2\}$$

gehörigen Nimspiels illustriert werden; allgemein gehört zur Position $\{\alpha, \alpha\}$ des zur Menge der transfiniten Zahlen $\leqq \alpha$ (oder zu

[9]) Um Missverständnisse zu vermeiden, bemerke ich, dass eine Partie, in welcher einer der Spieler gewinnt, notwendig endlich ist, also eine Ankündigung „Matt in ν Zügen" für eine transfinite Zahl ν wörtlich keinen Sinn hat.

jeder umfassenderen Menge der transfiniten Zahlen) gehörigen Nimspiels die transfinite Zahl α. (Dies alles dient nur zur Orientierung; was ich allgemein darunter verstehe, dass zu einer Position eine Ordnungszahl α gehört, werde ich im III. Teile genau festlegen.)

Ich werde im I. Teile die nötigen Begriffe formulieren, ihre einfachsten Eigenschaften beweisen und alles folgende vorbereiten, damit ich im II. und III. Teile die übrigen Sätze leicht beweisen kann.

I.

1. Unter einem *Spiele S* werde ich folgendes verstehen: Es sind gegeben

a) zwei fremde Mengen $\mathfrak{Q}_A$ und $\mathfrak{Q}_B$,

b) eine gewisse Untermenge $\mathfrak{P}$ der Menge sämtlicher geordneten Paare (q_1, q_2) von der Art, dass entweder q_1 ein Element von $\mathfrak{Q}_A$, q_2 ein Element von $\mathfrak{Q}_B$ ist, oder umgekehrt.

Man hat sich vorzustellen, es gibt zwei *Spieler*, A und B; die Elemente der Menge $\mathfrak{Q}_A$, bzw. $\mathfrak{Q}_B$ vertreten die *Positionen* des Spiels *S*, bei denen A, bzw. B *am Zuge* ist; die Vereinigungsmenge $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_A + \mathfrak{Q}_B$ ist also die Menge aller Positionen des Spiels *S*. Ein geordnetes Paar (q_1, q_2) von der Art, dass das eine von q_1, q_2 zu $\mathfrak{Q}_A$, das andere zu $\mathfrak{Q}_B$ gehört, represèntiert einen *Zug* und wird mit $q_1 \rightarrow q_2$ bezeichnet; derselbe ist ein Zug des A oder B, je nachdem bei q_1 der Spieler A oder B am Zuge ist. Die Angabe der Menge $\mathfrak{P}$ involviert die *Zugregeln:* die Elemente der Menge $\mathfrak{P}$ sind nämlich als die im Spiele *S regelrechten Züge* zu deuten.

Es is zu beachten, dass das Wort *Position* in dem Sinne verstanden wurde, dass alle Momente, die in den Spielregeln eine Rolle spielen, inbegriffen werden, also, ob der Zug $q_1 \rightarrow q_2$ regelrecht ist, oder nicht, durch die Positionen q_1, q_2 vollständig bestimmt sei (also nicht etwa von der Art, wie q_1, in später festzulegendem Sinne, entstanden ist, abhänge).[10])

Ist eine Position q_0 so beschaffen, dass es keinen regelrechten Zug des Spiels *S* von der Form $q_0 \rightarrow q_1$ gibt, so heisst q_0 eine

---

[10]) Z. B. sollen bei dem Schachspiele zwei Positionen, die sich nur dadurch unterscheiden, dass bei der einen der weisse König sich schon bewegt hat, bei dem anderen aber nicht, wegen einer Rochaderegel als verschieden gelten. Natürlich gelten bei jedem Spiele zwei Positionen, wenn bei der einen der Spieler A, bei der anderen B am Zuge ist, immer als verschieden.

Mattposition (kurz: ein Matt) des Spiels S; und zwar, wenn bei q_0 z. B. der Spieler A am Zuge ist, ein *Matt für* A im Spiele S.[11])

Unter einem *gemäss dem Spiele S* (eigentlich: gemäss den Spielregeln des Spiels S) *gespielten n-zügigen Partieanfange* verstehe ich eine Folge

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n \tag{$\mathfrak{p}$}$$

von $n+1$ Positionen derart, dass $q_{k-1} \to q_k$ für $k=1, 2, \ldots, n$ ein regelrechter Zug des Spiels S ist. Ist dabei q_n eine Mattposition, so nenne ich den Partieanfang $\mathfrak{p}$ eine *entschiedene Partie,* und zwar, wenn q_n z. B. ein Matt für A ist, eine *von* B *gewonnene*, oder eine *von* A *verlorene Partie gemäss* S. Speziell gilt jede Position q_0 als ein *nullzügiger Partieanfang,* und, falls sie eine Mattposition ist, auch als eine entschiedene Partie.

Eine Folge

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$$

von (abzählbar) unendlich vielen Positionen derart, dass $q_{k-1} \to q_k$ für $k=1, 2, \ldots, n, \ldots$ ein regelrechter Zug des Spiels S ist, nenne ich eine *unentschiedene (Remis-) Partie,* oder eine *weder von* A, *noch von* B *verlorene Partie gemäss* S.[12]) Unter einer *Partie gemäss* S verstehe ich eine entschiedene, oder eine unentschiedene, gemäss S gespielte Partie.

---

[11]) Von zwei Definitionen, bzw. Sätzen, die sich nur durch Vertauschung der Rolle der beiden Spieler A und B unterscheiden, werde ich der Kürze wegen immer nur eine angeben. — In Bezug auf das Patt (bei dem Schachspiele) vgl. die Fussnote [12]).

[12]) Den Umstand, dass bei dem Schachspiel auch Partieanfänge vorkommen können, die mit einer Position (einem „Patt") q, für welche kein regelrechter Zug von der Form $q \to q'$ vorhanden ist, endigen, und trotzdem nach den Spielregeln als unentschiedene Partie gelten, kann man leicht durch eine unwesentliche Abänderung des Wortlautes der Spielregeln erledigen, etwa folgenderweise. Man führt ein fünfundsechsigstes Feld $\mathfrak{f}$ ein. Ist $\mathfrak{f}$ leer und liegt kein Patt vor, so gelten die üblichen Schachspielregeln und es darf kein Stein auf $\mathfrak{f}$ gehen; im Falle einer Pattposition darf dagegen der am Zuge befindliche Spieler einen seiner Steine auf $\mathfrak{f}$ stellen. Ist $\mathfrak{f}$ besetzt, so hören die üblichen Regeln des Schachspiels gänzlich auf; der Spieler, der am Zuge ist, soll den auf $\mathfrak{f}$ stehenden Stein auf ein beliebiges Feld des Schachbrettes und zugleich einen seiner Steine auf $\mathfrak{f}$ stellen. Dadurch verwandelt sich jede „Pattpartie" in eine unendlich lange, also in eine auch im Sinne des Textes unentschiedene Partie. Ähnliche Abänderungen des Wortlautes der Spielregeln können auch bei der Anwendung auf andere bekannte Spiele nötig sein.

2. Ist ein Spiel S so beschaffen, dass jede mögliche Partie gemäss S von A gewonnen ist, so nenne ich S ein *Gewinnspiel des Spielers* A; ist S so beschaffen, dass keine Partie gemäss S von A verloren (also jede entweder gewonnen, oder unentschieden) ist, so heisst S ein *Nichtverlustspiel des Spielers* A. Ein Spiel S ist ersichtlich dann und nur dann ein Nichtverlustspiel des A, wenn keine der Positionen des Spiels S ein Matt für A ist.

Das Spiel S' soll ein *Unterspiel* des Spiels S (und S ein *Oberspiel* des Spiels S') heissen, wenn sowohl die Mengen $\mathfrak{Q}'_A$ und $\mathfrak{Q}'_B$ der Positionen des Spiels S', wie auch die Menge $\mathfrak{P}'$ der regelrechten Züge des Spiels S' bzw. Untermengen der entsprechenden, zu S gehörigen Mengen $\mathfrak{Q}_A$, $\mathfrak{Q}_B$, $\mathfrak{P}$ sind. Man spielt immer ein Unterspiel des Spiels S, wenn man S mit irgendwelcher Beschränkung spielt, z. B. wenn man bei dem Schachspiele die feindliche Dame verabredungsweise nie schlägt. Die Beschränkung kann auch aus einer „Taktik" entspringen; ein Unterspiel kann aber nur dann als eine Taktik des einen Spielers gedeutet werden, wenn die in ihr enthaltene Beschränkung den anderen Spieler überhaupt nicht berührt. Dementsprechend definiere ich:

Das Unterspiel S' des Spiels S soll eine *Taktik in engerem Sinne des Spielers* A *im Spiele* S heissen, wenn jeder im Oberspiele S regelrechte Zug $q_1 \rightarrow q_2$ des Gegners B auch im Spiele S' regelrecht ist, falls nur q_1 überhaupt eine Position des Spiels S' ist (also soll dann auch die Position q_2 eine Position des Unterspiels S' sein).

Der Ausdruck: Taktik *in engerem Sinne* (kurz: i. e. S.) zeigt, dass es hier nur um eine spezielle Art der Taktik handelt: es hängt nämlich nur von der Position q_1, nicht aber von der Vorgeschichte der Partie, in der sie vorkommt, ab, welche Züge von der Form $q_1 \rightarrow q_2$ der betreffenden Taktik entsprechen. Darum wird später noch eine Erweiterung des Begriffes Taktik nötig sein.

Ist eine Taktik i. e. S. des Spielers A im Spiele S selbst ein Gewinnspiel bzw. ein Nichtverlustspiel, führt sie also immer zum Gewinn bzw. nie zum Verlust, so nenne ich sie eine *Gewinntaktik*, bzw. eine *Nichtverlusttaktik i. e. S.* des A in S.

3. Es sei von jetzt an ein Spiel S fest vorgelegt; alle Begriffe, die nur in Bezug auf ein Spiel einen Sinn haben, werden sich, wenn nicht anders gesagt ist, auf S beziehen.

Ich nenne eine Position q_0 eine *Gewinnposition i. e. S. des*

Spielers A (im Spiele S), oder ich sage, dass *der Spieler* A *in der Position* q_0 *i. e. S. auf Gewinn steht,* wenn es eine Gewinntaktik i. e. S. T des A gibt, welche sich in der Position q_0 anwenden lässt, d. h. q_0 unter den Positionen des Spiels T vorkommt. Entsprechend sage ich, dass eine Position q_0 eine *Verlustposition i. e. S. des Spielers* A (in S) ist, oder, dass A *in der Position* q_0 *i. e. S. auf Verlust steht,* wenn es keine Nichtverlusttaktik i. e. S. T des A gibt derart, dass q_0 eine Position des Spiels T ist.

Man wird nun erwarten, dass Gewinnposition i. e. S. des einen Spielers und Verlustposition i. e. S. seines Gegners dasselbe bedeuten. Das ist in der Tat so; ich kann es aber nur durch transfinite Induktion beweisen (vgl. doch Fussnote[6]) und ich muss damit bis zum Ende des III. Teils warten. Jetzt beweise ich nur die ohne weiteres aus der Definition sich ergebende Hälfte der Behauptung, den

Satz I. *Eine Gewinnposition i. e. S.* q_0 *des Spielers* A *ist eine Verlustposition i. e. S. des Gegners* B.

Beweis. Sonst gäbe es eine Gewinntaktik i. e. S. T_1 des A und eine Nichtverlusttaktik i. e. S. T_2 des B, und q_0 wäre eine gemeinsame Position der Spiele T_1 und T_2. Was wird nun, wenn A gemäss T_1, B gemäss T_2 spielt? Betrachten wir also folgendes Spiel D, den „Durchschnitt der Spiele T_1 und T_2." Die Positionen des Spiels D seien die gemeinsamen Positionen der Spiele T_1 und T_2; ein Zug sei im Spiele D dann und nur dann regelrecht, wenn derselbe sowohl in T_1, als auch in T_2 regelrecht ist. D ist kein „leeres Spiel", d. h. wenigstens eine der zu D gehörigen Mengen $\mathfrak{Q}_A$, $\mathfrak{Q}_B$ ist nicht leer, denn q_0 ist ja eine Position des Spiels D. Daher[13]) gibt es eine gemäss D gespielte Partie $\mathfrak{p}$. Ist diese Partie entschieden, so endigt sie mit einem Matt q für A oder B in D. Wenn es nun eine Position q' des Spiels T_1, bzw. T_2, je nachdem bei q der Spieler A oder B am Zuge ist, gäbe derart, dass der Zug $q \to q'$ in T_1 (bzw. T_2) regelrecht ist, so wäre

[13]) Dass es zu jedem nichtleeren Spiele S eine gemäss S gespielte Partie gibt, beweist man, wie folgt. Gibt es eine Mattposition im Spiele S, so ist dieselbe schon eine (nullzügige) Partie gemäss S; sonst bezeichne, für jede Position q des Spiels S, $f(q)$ eine Position derart, dass der Zug $q \to f(q)$ in S regelrecht sei. (Hier wurde das ZERMELOsche Auswahlaxiom verwendet.) Ist nun q_0 eine beliebige Position des Spiels S, so ist

$$q_0,\ f(q_0),\ f(f(q_0)),\ f(f(f(q_0))), \ldots$$

eine gemäss S gespielte Partie.

derselbe auch im Oberspiele S regelrecht, also auch in T_2 (bzw. T_1), da dieses eine Taktik des bei q *nicht* am Zuge befindlichen Spielers ist; daher wäre der Zug $q \rightarrow q'$ auch in D regelrecht, was nicht zutrifft. Also gibt es keine solche Position q', d. h. q ist auch in T_1 (bzw. T_2) ein Matt für A (bzw. B), entgegen der Voraussetzung, dass T_2 ein Nichtverlustspiel des B, T sogar ein Gewinnspiel des A ist. Ist aber die Partie $\mathfrak{p}$ unentschieden, so ist sie auch gemäss T_1 gespielt,[14] was aber der Voraussetzung, dass T_1 ein Gewinnspiel ist, widerspricht.

4. Um den Begriff der Taktik und die damit zusammenhängenden Begriffe auch *im weiteren Sinne* erklären zu können, bedarf ich noch des Begriffes des Schriftspiels $\mathbb{S}$ eines Spiels S. Dasselbe soll, wie folgt, definiert werden. Die Positionen des Spiels $\mathbb{S}$ sind die gemäss S gespielten Partieanfänge $\mathfrak{q}$:

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n;$$

im Spiele $\mathbb{S}$ ist bei $\mathfrak{q}$ derjenige Spieler am Zuge, wie bei q_n im Spiele S. Ist $\mathfrak{q}'$ eine weitere Position des Spiels $\mathbb{S}$, so soll $\mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}'$ dann und nur dann als ein regelrechter Zug des Spiels $\mathbb{S}$ gelten, wenn $\mathfrak{q}'$ die Form

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}$$

hat und der Zug $q_n \rightarrow q_{n+1}$ in S regelrecht ist.[15]

Ich definiere nun eine *Taktik in weiterem Sinne* $\mathfrak{T}$ *des Spielers* A *im Spiele* S als eine Taktik in engerem Sinne des A in dem Schriftspiele $\mathbb{S}$ des Spiels S. Ich sage, dass A in einer gemäss S gespielten Partie $\mathfrak{p}$ die Taktik i. w. S. $\mathfrak{T}$ befolgt, wenn die „Schriftpartie“ der Partie $\mathfrak{p}$, d. h. die Folge seiner Partieanfänge, eine Partie gemäss $\mathfrak{T}$ ist.

Man erhält den Begriff der *Gewinntaktik, Nichtverlusttaktik, Gewinnposition, Verlustposition in weiterem Sinne* (i. w. S.), wenn man in den Definitionen der entsprechenden Begriffe i. e. S. (am Ende von **2.** und am Anfange von **3.**) den Zusatz i. e. S. überall

---

14) Dieser Schluss gilt natürlich nur im Falle, wenn die Partie $\mathfrak{p}$ unentschieden ist: eine entschiedene Partie gemäss einem Spiele hat keine vollendete Partie gemäss einem Oberspiele zu sein; sie ist, wenn ihre letzte Position im Oberspiele kein Matt ist, ein blosser Partieanfang.

15) Spielt man z. B. Schach in *Schrift* (etwa in Korrespondenz) und betrachtet man die so entstandenen einzelnen Partieanfänge als Positionen, so spielt man eigentlich das Schriftspiel des Schachspiels: daher allgemein der Name.

durch i. w. S. ersetzt. Z. B. heisst eine Position q eine Gewinnposition i. w. S. des Spielers A, wenn es eine Gewinntaktik i. w. S. $\mathfrak{T}$ des A gibt derart, dass q (als nullzügiger Partieanfang) eine Position des Spiels $\mathfrak{T}$ ist.[16])

5. Ein Vergleich der entsprechenden Begriffe i. e. S. und i. w. S. zeigt folgendes. Eine Taktik i. e. S. T des A ist selbst zwar keine Taktik i. w. S., wohl aber ihr Schriftspiel $\mathfrak{T}$; und eine Partie, in welcher A die Taktik i. w. S. $\mathfrak{T}$ befolgt, ist eine gemäss dem Spiele T gespielte Partie, und umgekehrt. Daraus folgt, dass eine Gewinnposition i. e. S. immer auch Gewinnposition i. w. S. ist. Bei den Verlustpositionen ist aber die Sache, wie man aus dem negativen Charakter der Definition der Verlustposition sofort ersieht, *umgekehrt:* der Begriff Verlustposition „i. e. S." ist tatsächlich *nicht enger,* als der entsprechende Begriff „i. w. S." Dieser Umstand wird uns glücklicherweise nicht mehr lange Unbequemlichkeiten machen, denn es wird sich gleich die *Äquivalenz* beider Begriffe herausstellen. (Die Äquivalenz der entsprechenden Begriffe der Gewinnposition wird sich auch ergeben, aber nur im III. Teile.)

Zuerst muss ich noch zwei Hilfssätze über Gewinnpositionen i. w. S. beweisen.

Hilfssatz Ia. *Es sei die Position q_0, bei welcher der Spieler* A *am Zuge ist, so beschaffen, dass es einen regelrechten Zug $q_0 \to q_0'$ des* A *gibt derart, dass* A *in der Position q_0' i. w. S. auf Gewinn steht. Dann ist auch q_0 eine Gewinnposition i. w. S. des A.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{T}$ die zur Position q_0' gehörige Gewinntaktik i. w. S. des A (also derart, dass q_0' eine Position des Spiels $\mathfrak{T}$ sei). Dann konstruiere ich eine Gewinntaktik i. w. S. $\mathfrak{T}_0$ des A durch „Adjunktion des Zuges $q_0 \to q_0'$ zum Spiele $\mathfrak{T}$" folgendermassen. Die Positionen des Spiels $\mathfrak{T}_0$ seien die Partieanfänge des Spiels S von der Form

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n,$$

kurz: $[q_0, \mathfrak{q}]$, wo der Partieanfang $\mathfrak{q}$, d. h.

$$q_1, q_2, \ldots, q_n$$

eine Position des Spiels $\mathfrak{T}$ ist; als Grenzfall soll auch q_0 eine Position des Spiels $\mathfrak{T}_0$ sein. Die Bestimmung, welcher Spieler bei

---

[16]) Diese Definition des Begriffs einer Gewinnposition i. w. S. des A deckt sich, wie man leicht sieht, mit der von Herrn König a. a. O.[3]) gegebenen Definition einer Position, in welcher A auf Gewinn steht.

einer Position am Zuge sein soll, sei „aus dem Schriftspiele $\mathfrak{S}$ des Spiels S übertragen," d. h. es soll im Spiele $\mathfrak{T}_0$ immer derjenige Spieler am Zuge sein, wie in $\mathfrak{S}$. Ein Zug $[q_0, \mathfrak{q}_1] \to [q_0, \mathfrak{q}_2]$ soll in $\mathfrak{T}_0$ dann und nur dann als regelrecht gelten, wenn der Zug $\mathfrak{q}_1 \to \mathfrak{q}_2$ im Spiele $\mathfrak{T}$ als regelrecht gilt; $[q_0, \mathfrak{q}] \to q_0$ sei niemals, $q_0 \to [q_0, \mathfrak{q}]$ dann und nur dann ein regelrechter Zug in $\mathfrak{T}_0$, wenn $\mathfrak{q}$ der nullzügige Partieanfang q_0' ist. Da das Spiel $\mathfrak{T}$ nach Voraussetzung eine Taktik i. w. S. ist, so ist es $\mathfrak{T}_0$ auch. Jede Partie gemäss S, in der A die Taktik i. w. S. $\mathfrak{T}_0$ befolgt, hat die Form $[q_0, \mathfrak{p}]$, wo in der Partie $\mathfrak{p}$ die Gewinntaktik i. w. S. $\mathfrak{T}$ befolgt wird; also ist jede solche Partie von A gewonnen, d. h. $\mathfrak{T}_0$ ist auch ein Gewinnspiel des A. Daher ist q_0 eine Gewinnposition i. w. S. des A.

Hilfssatz Ib. *Es sei die Position q_0, bei welcher der Spieler* B *am Zuge ist, so beschaffen, dass für alle regelrechten Züge $q_0 \to q_0'$ des* B *die Position q_0' eine Gewinnposition i. w. S. des* A *ist. Dann ist auch q_0 eine Gewinnposition i. w. S. des* A.

Beweis. Es bezeichne $\mathfrak{T}(q_0')$ die zur Position q_0 gehörige Gewinntaktik i. w. S. des A. Ich adjungiere zu jedem Spiele $\mathfrak{T}(q_0')$ den entsprechenden Zug $q_0 \to q_0'$ und dann „addiere" alle so entstandenen Spiele, d. h. ich konstruiere folgendes Spiel $\mathfrak{T}_0$. Die Positionen des Spiels $\mathfrak{T}_0$ seien die Partieanfänge gemäss S von der Form $[q_0, \mathfrak{q}]$ wo $\mathfrak{q}$ eine Position wenigstens eines der Spiele $\mathfrak{T}(q_0')$ ist; als Grenzfall sei auch q_0 eine Position des Spiels $\mathfrak{T}_0$. Die Bestimmung des am Zuge befindlichen Spielers sei wieder aus dem Schriftspiele $\mathfrak{S}$ übertragen. Ein Zug $[q_0, \mathfrak{q}_1] \to [q_0, \mathfrak{q}_2]$ soll in $\mathfrak{T}_0$ dann und nur dann als regelrecht gelten, wenn $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ mit einer der Positionen q_0', und zwar mit derselben, beginnen, und der Zug $\mathfrak{q}_1 \to \mathfrak{q}_2$ in dem zu *dieser* q_0' gehörigen Spiele $\mathfrak{T}(q_0')$ regelrecht ist, ein Zug $[q_0, \mathfrak{q}] \to q_0$ nie, ein Zug $q_0 \to [q_0, \mathfrak{q}]$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{q}$ ein nullzügiger Partieanfang und zwar einer der q_0' ist. $\mathfrak{T}_0$ ist eine Taktik i. w. S. des A: die Taktikeigenschaft folgt für Züge von der Form $q_0 \to [q_0, \mathfrak{q}]$ aus der Konstruktion des Spiels $\mathfrak{T}_0$, für andere Züge aus der Taktikeigenschaft aller Spiele $\mathfrak{T}(q_0')$ Jede Partie, in der A die Taktik i. w. S. $\mathfrak{T}_0$ befolgt, hat die Form $[q_0, \mathfrak{p}]$, wo in der Partie $\mathfrak{p}$ eine der Taktiken $\mathfrak{T}(q_0')$ befolgt wird, daher ist $\mathfrak{T}_0$, wie alle Spiele $\mathfrak{T}(q_0')$, ein Gewinnspiel des A. Da nun q_0 eine Position des Spiels $\mathfrak{T}_0$ ist, ist auch sie eine Gewinnposition des A.

6. Eine Position des Spiels S ist dann und nur dann eine

Gewinnposition, bzw. Verlustposition i. w. S., wenn sie, als nullzügiger Partieanfang, eine Gewinnposition, bzw. Verlustposition i. e. S. im Schriftspiele $\mathfrak{S}$ ist. Daher folgt aus dem Satze I., angewandt auf $\mathfrak{S}$, dass dieser Satz auch dann gilt, wenn der Zusatz i. e. S. durch i. w. S. ersetzt wird. Ich werde jetzt auch die Umkehrung des so gewonnenen Satzes beweisen.

S a t z II. *Gewinnposition i. w. S. des Spielers* A *bedeutet dasselbe, wie Verlustposition i. w. S. seines Gegners* B.[17])

Dazu muss ich also nur folgendes beweisen: Ist q_0 keine Gewinnposition i. w. S. des A, so ist dieselbe keine Verlustposition i. w. S. des B. Ich beweise sogar (*sogar* nach der obigen Bemerkung, nach welcher eine Verlustposition i. w. S. immer eine Verlustposition i. e. S. ist) den

S a t z III. *Eine Position* q_0, *welche keine Gewinnposition i. w. S. des Spielers* A *ist, ist keine Verlustposition i. e. S des Gegners* B.

Vorbemerkung: daraus wird ausser dem Satze II. auch der schon angekündigte

S a t z IV. *Verlustposition i. e. S. und i. w. S. des Spielers* A *bedeuten dasselbe*

folgen, denn nach der „vollständigen Umkehrung" des Satzes III. (wenn man dabei noch die Rolle der Spieler A und B vertauscht) ist eine Verlustposition i. e. S. des A immer eine Gewinnposition i. w. S. des B, also nach dem Satze II. (wieder mit Vertauschung der Spieler) eine Verlustposition i. w. S. des A; also ist der Begriff Verlustposition i. e. S. auch *nicht umfassender,* als der Begriff Verlustposition i. w. S.

B e w e i s d e s S a t z e s III. Nach der Voraussetzung steht der Spieler A in der Position q_0 nicht auf Gewinn i. w. S. Lassen wir B das Spiel so führen, dass A nie i. w. S. auf Gewinn stehe! Betrachten wir also folgendes Spiel R. Die Positionen des Spiels R seien diejenigen Positionen des Spiels S, in denen A nicht i. w. S. auf Gewinn steht. Die Bestimmung, welcher Spieler bei einer Position im Spiele R am Zuge ist, soll aus dem Spiele S übertragen werden. Ebenso seien die Zugregeln aus S übertragen, d. h. ein Zug $q' \to q''$ soll in R dann und nur dann als regelrecht

---

[17]) Wie Herr König mir nachträglich freundlichst mitteilte, war dieser Satz auch Herrn v. Neumann bekannt.

gelten, wenn derselbe auch in S regelrecht ist und ausserdem natürlich q', q'' Positionen des Spiels R sind.

R ist also ein Unterspiel des Spiels S; ich zeige, dass es sogar ein Taktik i. e. S. des Spielers B im Spiele S ist. Denn ist $q' \rightarrow q''$ ein regelrechter Zug des Gegners A im Spiele S und ist q' eine Position des Spiels R, so ist es q'' auch, d. h., A steht in der Position q'' nicht i. w. S. auf Gewinn: denn sonst stünde er nach dem Hilfssatze Ia. schon in der Position q' auf Gewinn i. w. S., also wäre q' keine Position des Spiels R. Die Taktik R ist ein Nichtverlustspiel des B, d. h. keine der Positionen des Spiels R ist ein Matt für B in R. Es sei nämlich q' eine Position des Spiels R, in welcher B am Zuge ist; dieselbe kann sicher kein Matt für B *im Spiele S* sein, denn sonst wäre sie eine Gewinnstellung i. w. S. (sogar i. e. S.) des A. Wäre nun q' ein Matt für *B im Spiele R* (d. h. „würde die Taktik, gemäss R zu spielen, in der Position q' versagen"), so wäre, für alle in S regelrechten Züge $q' \rightarrow q''$ des B, die Position q'' eine Gewinnposition i. w. S. des Spielers A; also wäre nach dem Hilfssatze Ib. auch die Position q' eine Gewinnposition i. w. S. des A, könnte also nicht eine Position des Spiels R sein. Man sieht also, dass R eine Nichtverlusttaktik i. e. S. des B ist; da nach der Voraussetzung q' eine Position des Spiels R ist, so ist q' keine Verlustposition des B. Also ist Satz III., also auch Satz II. und IV. bewiesen.

Man bemerke noch, dass die Nichtverlusttaktik i. e. S. R von der Position q' unabhängig ist, also, dass es eine universelle Taktik i. e. S. gibt, durch welche B in jeder Position, in der das überhaupt möglich ist, den Verlust verhindern kann.

Ich habe beim Beweise des Satzes III. von den Eigenschaften der Menge der Gewinnpositionen i. w. S. nur diejenigen benützt, die in den Hilfssätzen Ia. und Ib. ausgesprochen wurden; also gilt der Satz III. für alle Positionen q_0, die statt keine Gewinnposition i. w. S. des A zu sein, einer gewissen Menge $\mathfrak{M}$ der Positionen, die *auch* diese Eigenschaften besitzt, nicht angehören. Anders gesagt, die Menge der Verlustpositionen i. e. S. des B, oder, was nach den Sätzen IV. und II. dasselbe bedeutet, die Menge der Gewinnpositionen i. w. S. des A ist Untermenge einer jeden solchen Menge $\mathfrak{M}$. Also gilt der

Satz V. *Es sei eine Menge $\mathfrak{M}$ von Positionen des Spiels S so beschaffen, dass jede Position q_0, die der folgenden Bedingung* *genügt, in $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Ist bei q_0 der Spieler* A *am Zuge, so soll w e n i g s t e n s e i n Zug, ist bei q_0* B *am Zuge, so soll j e d e r Zug $q_0 \to q_0'$ zu einer Position q_0' führen, die ein Element der Menge $\mathfrak{M}$ ist. Dann ist jede Gewinnposition i. w. S. in der Menge $\mathfrak{M}$ enthalten.*

Nach dem Satze IV. darf man den Zusatz i. e. S. oder i. w. S. nach „Verlustposition" fortlassen; ich werde den Zusatz i. w. S. auch nach „Gewinnposition" „Taktik" usw. fortlassen, also sollen diese Begriffe, wenn nicht i. e. S. hinzufügt wird, immer i. w. S. verstanden werden.

II.

7. Ich werde jetzt den in der Einleitung besprochenen Satz über Gewinn ohne Wiederholung formulieren und beweisen. Ich nenne eine Partie

$$q_0, q_1, q_2, \ldots$$

eine *Partie ohne Wiederholung* (kurz: o. W.), wenn je zwei der Positionen $q_0, q_1, q_2, \ldots$ verschieden sind. Eine Taktik $\mathfrak{T}$ des A im Spiele S von der Beschaffenheit, dass jede Partie gemäss S, in welcher A die Taktik $\mathfrak{T}$ befolgt, o. W. ist, nenne ich eine Taktik o. W.

Es sei q eine Gewinnposition des Spielers A. Ich sage, dass A in der Position *q o. W. auf Gewinn steht,* oder, dass q eine *Gewinnposition o. W. des* A ist, wenn es für ihn eine Gewinntaktik o. W. $\mathfrak{T}$ gibt derart, dass q eine Position des Spiels $\mathfrak{T}$ ist. Eine Gewinnposition i. e. S. q ist immer eine Gewinnposition o. W.; ist nämlich T eine Gewinntaktik i. e. S. des A, so ist ihr Schriftspiel $\mathfrak{T}$ eine Gewinntaktik o. W. In der Tat, wäre

$$q_0, q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_l, q_k, \ldots$$

eine gemäss T gespielte Partie *mit* Wiederholung, so wäre

$$q_k, q_{k+1}, \ldots, q_l, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_l, q_k, q_{k+1}, \ldots$$

auch eine Partie gemäss T, und zwar eine Remispartie, entgegen der Voraussetzung, dass T ein Gewinnspiel ist.

Das war eine evidente Folge der Definition der Gewinnposition i. e. S.; ich werde aber dasselbe auch für jede Gewinnposition i. w. S. beweisen. Dazu brauche ich den folgenden

H i l f s s a t z II. *Befolgt der Spieler* A *in der Partie $\mathfrak{p}$ eine Gewinntaktik o. W. $\mathfrak{T}$, so ist jede Position q, die in $\mathfrak{p}$ vorkommt, eine Gewinnposition o. W.*

B e w e i s. Nach der Voraussetzung hat eine Position des Spiels $\mathfrak{T}$ die Form

$$q_0, q_1, \ldots, q_n, q,$$

kurz: $[\mathfrak{q}, q]$, wo $\mathfrak{q}$ den Partieanfang $q_0, q_1, \ldots, q_n$ bezeichnet. Betrachten wir alle Positionen des Spiels $\mathfrak{T}$, die mit $\mathfrak{q}$ beginnen (ausser $\mathfrak{q}$ selbst) und lassen wir bei einer jeden solchen den Anfang $\mathfrak{q}$ fort. Die so entstehenden Partieanfänge sollen die Positionen eines neuen Spiels $\mathfrak{T}'$ sein. In einer Position $\mathfrak{q}_0$ soll im Spiele $\mathfrak{T}'$ derselbe Spieler am Zuge sein, wie in $\mathfrak{T}$ bei der Position $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_0]$[18]; ein Zug $\mathfrak{q}_1 \to \mathfrak{q}_2$ soll in $\mathfrak{T}'$ dann und nur dann als regelrecht gelten, wenn $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1] \to [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_2]$ in $\mathfrak{T}$ regelrecht ist. Aus der Taktikeigenschaft des Spiels $\mathfrak{T}$ folgt die des Spiels $\mathfrak{T}'$; wenn A in einer Partie $\mathfrak{p}$ die Taktik $\mathfrak{T}'$ befolgt, so ist $[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}]$ eine Partie, in der A die Taktik $\mathfrak{T}$ befolgt, also ist $\mathfrak{T}'$, wie $\mathfrak{T}$, eine Gewinntaktik o. W. Nun ist aber q eine Position des Spiels $\mathfrak{T}'$, also ist die Behauptung bewiesen.

8. Nun beweise ich den

S a t z VI. *Steht der Spieler* A *in einer Position q_0 auf Gewinn, so ist q_0 eine Gewinnposition o. W. des* A

B e w e i s. Nach dem Satze V. genügt es nur den folgenden Hilfssatz zu beweisen.

H i l f s s a t z III. *a) Ist bei einer Position q_0 der Spieler* A *am Zuge und kann er einen regelrechten Zug $q_0 \to q_0'$ wählen derart, dass er in der nächsten Position q_0' auf Gewinn o. W. steht, so steht er bereits in q_0 auf Gewinn o. W.*

b) Ist bei einer Position q_0 der Spieler B *am Zuge und steht sein Gegner* A, *wie auch* B *den regelrechten Zug $q_0 \to q_0'$ wählen mag, in der nächsten Position q_0' auf Gewinn o. W., so steht* A *bereits in q_0 auf Gewinn o. W.*

B e w e i s. Ich werde ganz analog verfahren, wie bei den Beweisen der Hilfssätze Ia. und Ib. Es bezeichne also $\mathfrak{T}$ bzw. $\mathfrak{T}(q_0')$ die zur Position q_0' bzw. zu den Positionen q_0' gehörigen Gewinntaktiken o. W.; man adjungiere zum Spiele $\mathfrak{T}$ den Zug $q_0 \to q_0'$, bzw. man adjungiere zu jedem der Spiele $\mathfrak{T}(q_0')$ den entsprechenden Zug $q_0 \to q_0'$ und man addiere die so entstehenden Spiele. Man erhält dann in beiden Fällen ein Spiel $\mathfrak{T}_0$, der, wie

18) So bezeichne ich den Partieanfang, welcher mit $\mathfrak{q}$ beginnt und dann sich mit $\mathfrak{q}_0$ fortsetzt.

in 5. schon gezeigt wurde, eine Gewinntaktik des A ist. Wenn nun $\mathfrak{T}_0$ eine Taktik o. W. ist, so ist alles bewiesen, da q_0 eine Position des Spiels $\mathfrak{T}_0$ ist. Andernfalls gibt es eine Partie *mit* Wiederholung, in der A die Taktik $\mathfrak{T}_0$ befolgt. Diese Partie hat aber die Form $[q_0, \mathfrak{p}]$, wo A in der Partie $\mathfrak{p}$ eine Gewinntaktik o. W. (nämlich $\mathfrak{T}$, bzw. eine der $\mathfrak{T}(q_0'))$ befolgt, also $\mathfrak{p}$ eine Partie o. W. ist. Daher muss die Position q_0 in $\mathfrak{p}$ vorkommen, also ist sie nach dem Hilfssatze II. eine Gewinnposition o. W.

III.

9. Es sei α vorläufig eine natürliche Zahl, inclusive Null. Eine Gewinntaktik $\mathfrak{T}$ des A nenne ich eine *Gewinntaktik höchstens von der Ordnung* α, wenn jede Partie, in welcher A die Taktik $\mathfrak{T}$ befolgt, aus weniger als $\alpha+1$ Zugpaaren (d. h. höchstens aus $2\alpha+1$ Zügen) besteht. Eine Position q des Spiels S heisst eine *Gewinnposition des* A *von der Ordnung* α, wenn es eine Gewinntaktik des Spielers A höchstens von der Ordnung α, aber keine höchstens von der Ordnung $\alpha-1$ gibt, von welchem q (als nullzügiger Partieanfang) eine Position ist.

Es sei q eine Gewinnposition des A von der Ordnung α. Ist bei q der Spieler A am Zuge, so kann er durch einen regelrechten Zug $q \to q'$ eine Gewinnposition q' von der Ordnung α herbeiführen. Dazu hat er nämlich den Zug $q \to q'$ so zu wählen, dass derselbe der zu q gehörigen Gewinntaktik $\mathfrak{T}$ höchstens von der Ordnung α entspreche, d. h. der Zug $q \to [q, q']$ in $\mathfrak{T}$ regelrecht sei. Die zu q' gehörige Gewinntaktik $\mathfrak{T}'$ höchstens von der Ordnung α konstruiert man, wie folgt. Betrachten wir diejenigen Positionen des Spiels $\mathfrak{T}$, welche die Form $[q, \mathfrak{q}]$ haben, dann sind die $\mathfrak{q}$ die Positionen des Spiels $\mathfrak{T}'$. Die Spielregeln des Spiels $\mathfrak{T}'$ sollen analog definiert werden, wie beim Beweise des Hilfssatzes II.: bei der Position $\mathfrak{q}$ ist derselbe Spieler am Zuge, wie bei $[q, \mathfrak{q}]$ im Spiele $\mathfrak{T}$; ein Zug $\mathfrak{q}_1 \to \mathfrak{q}_2$ ist in $\mathfrak{T}'$ dann und nur dann regelrecht, wenn der Zug $[q, \mathfrak{q}_1] \to [q, \mathfrak{q}_2]$ in $\mathfrak{T}$ regelrecht ist. $\mathfrak{T}'$ ist eine Taktik des A; befolgt A in einer Partie $\mathfrak{p}$ die Taktik $\mathfrak{T}'$, so befolgt er in der Partie $[q, \mathfrak{p}]$ die Taktik $\mathfrak{T}$; also ist auch $\mathfrak{T}'$ eine Gewinntaktik höchstens von der Ordnung α. Und es gibt keine Gewinntaktik $\mathfrak{T}$ höchstens von der Ordnung $\alpha-1$, von welchem q' eine Position ist: denn aus $\mathfrak{S}$ würde durch Adjunktion des Zuges $q \to q'$ (vgl. den Beweis des Hilfssatzes Ia.) eine Gewinntaktik $\mathfrak{T}'$ höchstens von der Ordnung

$\alpha - 1$ entstehen und q wäre eine Position des Spiels $\mathfrak{T}'$. Eine analoge Schlussweise zeigt, dass, wenn in der Gewinnposition q des A von der Ordnung α der Spieler B am Zuge ist, so führt jeder regelrechte Zug $q \to q'$ des B eine Gewinnposition q' von einer Ordnung $< \alpha$ herbei.

Der Begriff einer Gewinnposition von der Ordnung α lässt sich also auch durch vollständige Induktion, wie folgt, definieren.

B_0) Eine Position q, bei welcher B am Zuge ist, heisst *eine Gewinnposition 0-ter Ordnung (des Spielers* A), wenn sie ein Matt für B ist.

A_0) Eine Position q, bei welcher A am Zuge ist, heisst *eine Gewinnposition 0-ter Ordnung,* wenn es einen regelrechten Zug $q \to q'$ gibt derart, dass q' ein Matt für B ist.

B_α) Eine Position q, bei welcher B am Zuge ist, heisst *eine Gewinnposition von der Ordnung* α, wenn sie keine Gewinnposition von einer Ordnung $< \alpha$ ist, und wenn für jeden regelrechten Zug $q \to q'$ die Position q' von einer Ordnung $< \alpha$ ist.

A_α) Eine Position q, bei welcher A am Zuge ist, heisst *eine Gewinnposition von der Ordnung* α, wenn sie keine Gewinnposition von einer Ordnung $< \alpha$ ist, und wenn es einen regelrechten Zug $q \to q'$ gibt derart, dass die Position q' von der Ordnung α ist.

Dass diese Definition mit den früheren äquivalent ist, folgt aus den obigen Überlegungen, wenn man noch bemerkt, dass, falls q nach der letzteren Definition eine Gewinnposition des A von der Ordnung α ist, das Schriftspiel der folgenden Gewinntaktik i. e. S. T des A eine Gewinntaktik höchstens von der Ordnung α ist. Die Positionen des Spiels T sollen sämtliche Gewinnpositionen des A von einer Ordnung $\leqq \alpha$ (im Spiele S, nach der letzteren Definition) sein mit der „natürlichen", d. h. aus S übertragenen Bestimmung des am Zuge befindlichen Spielers; ein in S regelrechter Zug $q_1 \to q_2$, wo q_1, q_2 Positionen des Spiels T sind, soll in T dann und nur dann als regelrecht gelten, wenn die Ordnungszahl der Position q_2 nicht grösser ist, als die der Position q_1.

10. Nun steht es gar nichts im Wege, die letztere Definition als eine Definition mittels transfiniter Induktion zu betrachten; also ist der Begriff einer Gewinnposition des A von der Ordnung α für eine beliebige, auch transfinite Ordnungszahl α definiert. Man sieht leicht (durch „Auflösung der Induktion"), dass dieser Begriff für die einfachsten transfiniten Ordnungszahlen ω, $\omega +$ *endlich*, $\omega . 2$ die in der Einleitung angegebene Bedeutung hat.

Eine „Gewinnposition des A von einer Ordnung α" ist wirklich eine Gewinnposition des A, und zwar i. e. S. Es lässt sich sogar eine universelle Gewinntaktik G_A i. e. S. des A angeben derart, dass jede Gewinnposition von irgendeiner Ordnung α[19]) eine Position des Spiels G_A sei. Die Positionen des Spiels sind nämlich eben diese „mit einer Ordnungszahl versehenen" Gewinnpositionen des A mit der „natürlichen" Bestimmung des am Zuge befindlichen Spielers; ein in S regelrechter Zug $q_1 \to q_2$ gilt in G_A dann und nur dann als regelrecht, wenn die Ordnungszahl der Position q_2 nicht kleiner ist, als die Ordnungszahl der Position q_1. G_A ist ein Gewinnspiel des A, da bei einer gemäss G_A gespielten Partie

$$q_0, q_1, q_2, \ldots$$

die Ordnungszahlen der nacheinander folgenden Positionen

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

nie wachsen und bei jedem Zuge des B (wegen B_α)) abnehmen, also eine endliche Folge bilden; die letzte Position q_n ist dann ein Matt, und zwar für B, da wegen A_α) eine Mattposition für A nie mit einer Ordnungszahl versehen ist. Ausserdem folgt aus B_α), dass G_A eine Taktik i. e. S. des A ist.

Nun gilt aber auch die Umkehrung der eben bewiesenen Behauptung, ja sogar der

S a t z VII. *Für jede Gewinnposition q (i. w. S.) des* A *gibt es eine Ordnungszahl α derart, dass q eine Gewinnposition von der Ordnung α ist.*

B e w e i s. Nach dem Satze V. genügt es, folgende beide Behauptungen zu erweisen.

a) Ist bei einer Position q_0 der Spieler A am Zuge und gibt

19) Hier (und auch einigemal noch unten) steckt eigentlich eine Verwendung des Begriffes: *Gesamtheit sämtlicher Ordnungszahlen*, aber nur in einer harmlosen (d. h. auch vom Gesichtspunkte der axiomatischen Mengenlehre keine Schwierigkeiten machenden) Form, nämlich, in der Terminologie des Herrn J. v. NEUMANN (Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Mathematische Zeitschrift*, Bd. **27.** (1928), S. 669—752): nicht als „Menge", sondern nur als „Bereich". Übrigens könnte ich mich, wenn ich mich auf den Wohlordnungssatz des Herrn ZERMELO berufen wollte, von vorherein auf die Menge derjenigen transfiniten Ordnungszahlen beschränken, deren Kardinalzahl nicht grösser ist, als die der Menge sämtlicher Positionen des Spiels S. (Vgl. Satz IX.)

es einen regelrechten Zug $q_0 \to q_0'$ derart, dass q_0' eine Gewinnposition des A von einer Ordnung α ist, so ist auch q_0 eine Gewinnposition des A von einer gewissen Ordnung β.

b) Ist bei einer Position q_0 der Spieler B am Zuge und ist, für jeden regelrechten Zug $q_0 \to q_0'$, die Position q_0' eine Gewinnposition des A von einer Ordnung $\alpha = \alpha(q_0')$, so ist auch q_0 eine Gewinnposition des A von einer gewissen Ordnung β.

Zu *a*). Nach A_α) ist die Position q_0, wenn sie keine Gewinnposition des A von einer Ordnung $< \alpha$ ist, eine Gewinnposition des A von der Ordnung α.

Zu *b*). Es bezeichne α^* die (nach der Theorie der transfiniten Zahlen stets existierende) kleinste Ordnungszahl, die grösser ist, als jede der $\alpha(q_0')$; dann ist nach B_α) die Position q_0, wenn sie keine Gewinnposition des A von einer Ordnung $< \alpha^*$ ist, eine Gewinnposition von der Ordnung α^*.

Als Corollar ergibt sich der

Satz VIII. *Gewinnposition i. e. S. und i. w. S. bedeuten dasselbe.*

11. Es sei das Spiel S so beschaffen, dass für jede Position q des Spiels S die Mächtigkeit der Menge sämtlicher regelrechter Züge von der Form $q \to q'$ kleiner ist, als eine gewisse transfinite Kardinalzahl μ.[20] Dann gilt der Satz VII. in der schärferen Fassung:

Satz IX. *Ist q eine Gewinnposition des A im Spiele S, so gibt es eine Ordnungszahl $\alpha < \mu$*[21]) *derart, dass q eine Gewinnposition von der Ordnung α ist.*

Beweis. Sonst gäbe es wenigstens eine Ordnungszahl $\alpha \geqq \mu$ derart, dass eine Position des Spiels S eine Gewinnposition des A von der Ordnung α ist; β bezeichne die kleinste dieser Ordnungszahlen. Nach A_α) gibt es dann jedenfalls eine Gewinnposition q_0 des A von der Ordnung β, bei welcher B am Zuge ist. Nach B_α) ist, wie auch der regelrechte Zug $q_0 \to q_0'$ gewählt wird, q_0' eine Gewinnposition von einer Ordnung $\alpha = \alpha(q_0') < \beta$; also ist, nach

[20]) Nach dem Wohlordnungssatze des Herrn ZERMELO gibt es jedenfalls eine solche transfinite Kardinalzahl μ.

[21]) Ich bezeichne mit μ nicht nur eine *Kardinalzahl*, sondern auch die zugehörige *Anfangszahl:* es ist ja, wie aus den axiomatischen Untersuchungen des Herrn v. NEUMANN (vgl. a. a. O.[19]), S. 731.) besonders hervortritt, bequem, diese beiden Begriffe als *identisch* zu betrachten. Also bedeutet $\alpha < \mu$, dass die Kardinalzahl von α kleiner als μ ist.

der Definition von β, $\alpha(q_0')<\mu$. Da aber, nach der Voraussetzung, die Mächtigkeit der Menge sämtlicher $\alpha(q_0')$ kleiner als μ ist, gibt es bekanntlich eine Ordnungszahl $\alpha^*<\mu$, die grösser ist, als jede der $\alpha(q_0')$; nach B_α) ist die zur Gewinnposition q_0 gehörige Ordnungszahl $\beta\leq\alpha^*$, was der Voraussetzung $\beta\geq\mu$ widerspricht.

Als Speziellfall $\mu=\omega$[22]) ergibt sich der in der Einleitung ausgesprochene Satz des Herrn König.

12. Aus dem Vorigen ergibt sich, wenn man auch die durch Vertauschung der Rolle der Spieler A und B (wodurch auch die Verlustpositionen des A je eine Ordnungszahl erhalten) sich ergebenden Sätze berücksichtigt, folgendes.

a) Jede Position des Spiels S gehört entweder zur Menge $\mathfrak{G}_A$ der Gewinnpositionen des Spielers A, oder zur Menge $\mathfrak{G}_B$ der Gewinnpositionen des Spielers B, oder aber zur Menge $\mathfrak{R}$ der Remispositionen, d. h. der Positionen, in denen sowohl A, als auch B imstande ist, den Verlust durch je eine geeignete Nichtverlusttaktik zu verhindern.

b) Es gibt je eine, nur vom Spiele S abhängige Gewinntaktik (sogar in engerem Sinne) G_A, bzw. G_B (Vgl. **10.**), durch welche A, bzw. B in jeder Position, die zur $\mathfrak{G}_A$, bzw. $\mathfrak{G}_B$ gehört, den Gewinn erzwingen kann. Es gibt eine, nur vom Spiele S abhängige Nichtverlusttaktik (sogar in engerem Sinne) R_A, bzw. R_B (letztere wurde in **6.** eingeführt und mit R bezeichnet), durch welche A, bzw B in jeder zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Position den Verlust vermeiden kann.

c) Man kann den Wert einer Gewinnposition des A, oder B durch eine (endliche oder transfinite) Ordnungszahl ausdrücken, welche gewissermassen den Abstand vom Matt misst. Man betrachtet sinngemäss zwei Gewinn- oder Verlustpositionen des einen Spielers mit derselben Ordnungszahl, sowie zwei Remispositionen immer als für diese Spieler gleichwertig, eine Gewinnposition mit der kleineren Ordnungszahl besser, als eine mit der grösseren, diese wiederum besser, als irgendeine Remisposition, diese besser, als eine Verlustposition und endlich von zwei Verlustpositionen die mit der grösseren Ordnungszahl besser, als die mit der kleineren.

d) Aus keiner Position kann der am Zuge befindliche Spieler

[22]) Hier bezeichnet also, laut der Fussnote [21]), ω auch die abzählbare Mächtigkeit.

in eine für ihn bessere durch einen regelrechten Zug übergehen[23]): die „Verbesserung" der Position erfolgt immer durch einen (eventuell, wenn nämlich der Gegner schon auf Verlust steht, erzwungenen) „Fehlzug" des Gegners; also ist jedes Spiel ein „Kampf von Fehlern gegen Fehler". (Vgl. für Gewinn- und Verlustpositionen des am Zuge befindlichen Spielers A_α) und B_α), für Remispositionen Hilfssatz Ia.)

e) Aus einer Gewinn- oder Remisposition kann man in eine gleichwertige übergehen (vgl. A_α), bzw. Hilfssatz Ib.) Einen Zug, der dies erzielt, kann man sinngemäss als einen „guten", „bestmöglichen" Zug bezeichnen. Für eine Gewinnposition gibt die bestmöglichen Züge die Gewinntaktik G_A bzw. G_B, für eine Remisposition die Nichtverlusttaktik R_A bzw. R_B an. In einer Verlustposition gibt es nur schlechte Züge: man *muss* in eine schlechtere Position übergehen. (Vgl. B_α).)

f) Ist die Ordnungszahl α einer Verlustposition q keine Limeszahl, so gibt es für den auf Verlust stehenden Spieler doch wenigstens einen Zug, den man als einen „am wenigsten schlechten" Zug bezeichnen kann: nämlich einen Zug, der eine Position mit der Ordnungszahl $\alpha - 1$ herbeiführt. (Denn gäbe es keinen solchen Zug, so wäre nach B_α) die zur Position q gehörige Ordnungszahl $\leqq \alpha - 1$). Ist aber die Ordnungszahl einer Verlustposition eine Limeszahl, so gibt es augenscheinlich zu jedem Zuge einen anderen, der weniger schlecht ist.

(*Eingegangen am 22. Mai 1928*)

---

[23]) Für Gewinnpositionen des am Zuge befindlichen Spielers ist das allerdings nur eine Bezeichnungssache.

The plane translation theorem of BROUWER and the last geometric theorem of POINCARÉ.

By B. de KERÉKJÁRTÓ (Szeged).

Researches on topological transformations of surfaces lead to the following fundamental questions. One of them concerns the determination of the different classes of invariant points and their indices; to this category belong the theorems of BROUWER, BIRKHOFF, ALEXANDER and NIELSEN. We refer to the excellent work of J. NIELSEN[1]) which contains a general and systematic treatment of this kind of problem.

The other problem is to investigate the structure of surface transformations that is to say to study their *morphology* (using a very appropriate expression of Prof. BIRKHOFF). To this sort of question belong the plane translation theorem of BROUWER, the last geometric theorem of POINCARÉ, its extensions given by BIRKHOFF, the general translation theorem of BROUWER (which is yet unproved) and the results of BIRKHOFF on iterations of topological transformations.

The main problem for questions in this category is to determine a *transformation-field* that is a *maximal region lying outside its image:* this general notion is due to the profound investigations of BROUWER.[2])

The method of BROUWER for constructing a transformation-field is based on the analysis situs of general plane continua;[2]) this way

---

[1]) J. NIELSEN, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, *Acta Mathematica,* 50 (1927), p. 189—358.

[2]) L. E. J. BROUWER, Über eineindeutige stetige Transformationen von Flächen in sich, *Math. Annalen,* 69 (1910), p. 176—180. See his references there to the *Proc. of the Royal Academy at Amsterdam.*

is difficult and as BROUWER has admitted the conclusions are unsufficient. The proof of the plane translation theorem given by BROUWER[3]) is complete but too complicated. Recently SCHERRER[4]) has outlined a new method which seems to be more simple than that of BROUWER but which is restricted to the plane translation theorem.

The general proof of POINCARÉ's last geometric theorem given by BIRKHOFF[5]) is extremely ingenious; but it seems to me that it is especially related to this single theorem and cannot be employed to similar problems of more general type.

The aim of the present paper is to give a general and elementary method of constructing a transformation-field which might be employed for several questions of morphology of surface transformations. In the first two paragraphs the general method is developed; in the third and in the fourth paragraph I employ the general method to prove the plane translation theorem of BROUWER and the last geometric theorem of POINCARÉ. — It may have some interest to observe that my method of proving the theorem of POINCARÉ is very similar to the way in which POINCARÉ has tried to prove it; in essence it may be considered as the completion of his attempts.[6])

The further development and other applications of the same method will be given in a subsequent paper of the author. Among others there will be treated the general theorem of BROUWER concerning translations on arbitrary surfaces and the other abovementioned topics of morphology.

1. Preliminaries.

1. 1 Lemma on arcus-variation.

L e m m a. Let j and j' be two simple closed curves in the plane, which have an arc α in common such that the interiors of j and j' both lie on the same side of α. Let t be a topological

---

3) L. E. J. BROUWER, Beweis des ebenen Translationssatzes, *Math. Annalen*, **72** (1912), p. 36—54.

4) W. SCHERRER, Translationen über einfach zusammenhängende Gebiete, *Vierteljahrsschr. d. Naturforsch. Ges. Zürich*, **70** (1925), p. 77 - 84.

5) G. D. BIRKHOFF, An extension of POINCARÉ's last geometric theorem, *Acta Mathematica*, **47** (1925), p. 297—311.

6) H. POINCARÉ, Sur un théorème de géométrie, *Rendiconti d. Circ. Mat. di Palermo*, **33** (1912), p. 375—407.

(i. e. continuous one-to-one) transformation of j into j' which preserves the sense of orientation and has no invariant points. If there exists an arc β of $j-\alpha$ and an arc γ of $j'-\alpha$, each containing all common points of $j-\alpha$ and of $j'-\alpha$ and such that *1)* the image β' of β has no point in common with γ except extremities, *2)* the arcs α and β' do not separate the arcs α' and γ from one another on j' (where α' and β' denote the images of α and β respectively) then *the variation of argument of the transformation-vector in a positive circuit of the curve j is equal to 2π.* (Fig. 1).

We may deform the curve j' by little so that the arcs α and γ have no extremities in common and that all the common points of $j-\alpha$ and $j'-\alpha$ are internal points of γ. Replace the arc γ by an arc γ_1 which does not meet j, except for one point of γ at most, in such a way that the arcs $j'-\gamma$ and γ_1 form a simple closed curve j'' whose interior lies on the same side of α as the interior of j'. Define a topological transformation of j into j'', say t', such that the image of γ by the inverse of t is transformed under the transformation t' into γ_1, while otherwise the transformations t and t' are the same.

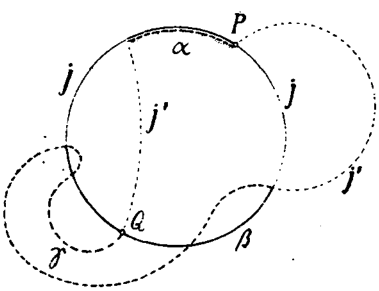

Fig. 1.

In consequence of our assumption *1)* the arc γ^* which is carried under t into the arc γ has no point in common with $\beta+\gamma$; furthermore the arcs γ^* and α belong to the arc $j-\beta$, and the interiors of j'' and j' both lie on the same side of α. Consequently the angular variation of a vector whose origin describes the arc γ^* and whose extremity describes first the arc γ as image of the origin under t, and then the arc γ_1 as image of the origin under t' is in both cases the same.

If the whole arc $j''-\alpha$ lies inside (or outside) the curve j, then one of the curves j and j'', say j'', is contained in the interior of the other one, save for the common points, for the interiors of j and j'' lie on the same side of α; we deform j'' continuously into a single point in its interior; the total variation of the transformation-vector changes continuously, moreover it is a multiple of 2π, so that it is just 2π.

If neither of the curves j, j'' lies inside the other, then $j''-\alpha$

consists of two arcs, one of them being interior, the other one exterior to the curve j; let Q be their common extremity on j and let P be the common extremity of α and of the arc of $j''-\alpha$ lying outside j; denote by P', Q' the images of P and Q. From the condition *2)* of the lemma it follows that the pairs of points P', Q and P, Q' do not separate one another on j''. By a continuous deformation of the transformation t' of j into j'', under which no point of j coincides with the corresponding point of j'', we carry the point P' through Q into a point of j'' lying inside j; in the same way we carry the point Q' through P into a point of j'' inside j. To the arc QP of j which lies inside j'' corresponds then the arc $Q'P'$ of j'' lying inside j. Deform the curve j'' in its interior into a single point lying inside j, in such a way that the arc $Q'P'$ remains continually inside j. Under this deformation no point of j coincides with the corresponding point of j''; hence the total variation of the transformation-vector changes continuously and for the final position it is equal to 2π. — This completes the proof of the above lemma.

1. 2 On translation-arcs.

Let t denote a sense-preserving topological transformation of the plane into itself without invariant point.

We und rstand by a *translation-arc* a simple continuous arc AB such that B is the image of A under the given transformation t and that the image of the arc AB does not contain any interior point of the arc AB.

A translation-arc passing through any given point of the plane can be constructed in the following simple way due to BROUWER. Join P to its image P' by the straight segment PP'; let a variable point starting from P describe this segment up to the first point for which the described path and its image have a common point Q'. If Q' coincides with P' then the segment PP' is a translation-arc. If Q' is different from P', denote by Q'' and Q the image of Q' by the direct and inverse transformations respectively. To fix our ideas, suppose that at the point Q' the segment PQ' abuts on a side of its image, that is the arc $P'Q''$. (If the arc $P'Q''$ abuts on a side of the segment PQ', we interchange in the following consideration the rôle of P with that of P' and the rôle of the transformation t with that of its inverse). We choose a point B on PQ' very near to Q' and denote by A and C its inverse and direct images respectively. We join A to P by a continuous arc AP which remains very near to PQ' and lies on one side of it; under such circumstances the arc AP does not intersect its image. Consequently the arc composed of the arc AP and of the segment PB forms a translation-arc passing through the point P.

Theorem I. *A translation-arc AB and its images BC and CD under the transformations t and t^2 together form a simple arc.*[7])

Suppose *first* that $AB+BC$ is not a simple arc; then A coincides with C or with an internal point of the arc BC. Denote by j the simple closed curve composed of the arc $\beta = AB$ and of the subarc $\alpha = BA$ of BC. The image of j is a simple closed curve j' composed of the arc BC and of the subarc CB of CD. Denote the subarc CB of CD by γ and observe that γ is identical with the image α' of α. The arc α is common to the curves j and j' and their interiors lie on the same side of it. The image β' of β, that is the arc BC, has no point in common with the arc $\gamma = CB$ except extremities. Thus all the conditions of the Lemma 1.1 are realized; hence it follows that the transformation t has an invariant point inside j. But this is contradictory to our assumption about the transformation.

Secondly we assume that the *simple* arc $AB+BC$ has a point in common with the arc CD; this common point cannot belong to BC. Describe the arc CD starting from C and denote by P its first point belonging to AB. Denote by β the subarc PB of AB and by j the simple closed curve which is composed of the arcs β, BC and the subarc CP of CD. Let DE denote the arc which is the image of CD, and P' the image of the point P. The image of j is the simple closed curve j' composed of the subarc $P'C$ of BC, the subarc DP' of DE and the arc CD. Call α the arc composed of the subarc $P'C$ of BC and the subarc CP of CD. The curves j and j' have the arc α in common and their interiors lie on the same side of it. Let γ denote the arc composed of the subarc PD of CD and the subarc DP' of DE. Then we recognize that all conditions of Lemma 1.1 are satisfied; in fact the image β' of β is the arc $P'C$ which has no internal

---

[7]) Cf. Brouwer, *Math. Annalen*, **72** (1912) p. 38—39.

point in common with γ; the arcs α' and γ have the arc DP' in common, so that the condition *2)* also is fulfilled. Thus a contradiction would arise as above.

1. 3 Arc abutting on its image.

We represent the arcs AB and BC (and also CD) as straight segments of unit length on the x axis so that B is the origin of coordinates and lies to the right of A. Then we mark the *upper* and *lower side of the segment* AC and the *right-hand-side and left-hand-side of an arc starting from a point of* AC. We observe that in consequence of the assumption that the transformation t preserves sense, the upper and the lower side of the segment AB is carried by the transformation into the upper and the lower side of BC respectively, and the right- and left-hand-sides of an arc starting from B go over respectively into the right- and left-hand-sides of the image arc starting from C. (The strict meaning of these intuitive notions is assured by JORDAN's theorem on simple closed curves).

Consider a simple arc, starting from the point B, which does not meet the segment AC elsewhere. Describe this arc up to the first point for which the described path b and its image have a common point. We shall say that *the arc b abuts on its (direct or inverse) image* and we understand by this expression that the arc b and its image have a common point, while no proper subarc of b of origin B meets its image. Let a and c denote the inverse and the direct image of b respectively.

b and c have just one common point; either the extremity P of b is an internal point of c or, vice versa, the extremity P' of c is an internal point of b. If P belonged to c and at the same time P' to b, then the arc PbP' of b would be a translation-arc, for its internal points do not belong to c, and P' is the image of P; the image of PbP' would then be a proper subarc of $P'cP$, in consequence of Theorem I. By interchanging the rôle of PbP' and $P'cP$ and considering t^{-1} instead of t, the opposite of the above statement would result. From this contradiction we conclude that b and c have just one point in common. The same holds true concerning the arcs a and b.

Theorem II. *Let b be a simple arc of origin B which does not meet the segment AC elsewhere and which abuts on its image.*

The direct and inverse images c and a of b cannot meet the segments AB and BC respectively.

Suppose the arc a meets BC; describe the arc a starting from A and denote by Q its first point belonging to BC (Fig. 2).

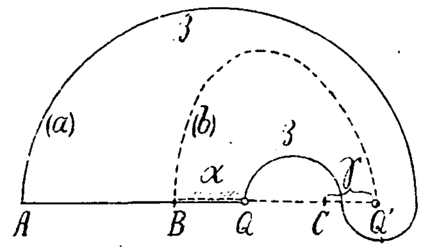

Fig. 2

Call j the simple closed curve composed of the arc AaQ and of the segment ABQ. Let Q' be the image of Q; the image of j is the simple closed curve j' composed of the arc BbQ' and of the segment BCQ'. The segment $\alpha = BQ$ belongs to j and to j'; as the interior of j corresponds by the transformation to the interior of j' and the upper side of ABQ goes over into the upper side of BCQ' it follows that the interiors of j and j' both lie on the same side of α. Denote by β the arc AaQ and by γ the segment CQ'. Both β and γ contain all the common points of $j - \alpha$ and of $j' - \alpha$. The image β' of β is the arc BbQ' which has no point on γ except its extremity Q'. Finally we have $\alpha' = \gamma$ so that condition *2)* of the Lemma 1. 1 is also satisfied. From this would follow the existence of an invariant point inside j, contrary to our assumption.

From the above proof we obtain immediately the following

Theorem II'. *Let QS be a translation-arc, and ST its image. Let KL be a subarc of QST which contains the image K' of K. If λ denotes a simple arc which forms together with the arc KL a simple closed curve, then λ must intersect its own image.*[8])

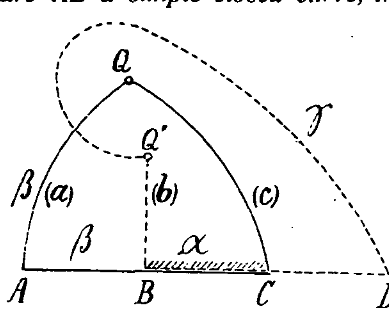

Fig. 3.

We wish to prove the following

Theorem III. *The arcs a and c have no point in common.*

Suppose the contrary and denote by Q the first point of a counted from A which belongs to c (Fig. 3.); the arcs AaQ, CcQ and the segment ABC together form a simple closed curve j (cf. Theorem II). Either AaQ must be a proper subarc of a, or CcQ

[8]) Cf. Brouwer, *Math. Annalen* **72** (1912), p. 44., Satz 6.

a proper subarc of c; otherwise the common extremity Q of a and c would be transformed by t^2 into itself, which is excluded by Theorem I. Suppose then AaQ to be a subarc of a; its image is a subarc BbQ' of b which does not meet either of AaQ and CcQ. The image DQ' of CcQ cannot meet CcQ except in the point Q. Now let α be the segment BC, which is a common arc of the curve j and of its image j'; the interiors of j and j' both lie on the same side of α for the same reason as in the proof of Theorem II. Denote by β the arc composed of the arc AaQ and the segment AB: and by γ the arc composed of CD and DQ'. Obviously all the conditions of the Lemma $1 \cdot 1$ are satisfied including the condition *2)* also, for the image α' of α, that is the segment CD, belongs to γ. From this a contradiction arises.

Now we want to show that the bounded region determined by the arcs a, b, and the segment AB, which we denote by (a, b, AB) abuts on the upper or lower side of AB according to whether b goes from B upwards or downwards. Otherwise the segment BC which has no point on a, b, AB except B, would lie in the region (a, b, AB). In consequence of Theorems II and III the arc c would then lie in the same region. The image of the region (a, b, AB), that is the region (b, c, BC), would abut on the upper side of BC while the region (a, b, AB) abuts on the lower side of AB. This is a contradiction as has been observed above.

Finally we observe that a cannot abut on the right-hand-side of b. (In the same way b cannot abut on the left-hand-side of a.) Otherwise the extremity of b would be separated from the point C by the simple closed curve composed of AB, a and a subarc of b; but the arc c joins the point C to the extremity of b. This is a contradiction to the Theorems II and III.

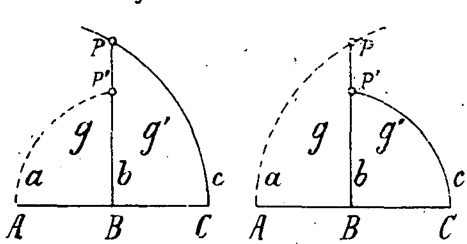

Fig. 4.

Our result may be summarized in the following

T h e o r e m IV. *Let b be a simple arc starting upwards from B and not meeting the segment AC elsewhere; suppose that b abuts on its image; denote by a and c its inverse and direct image respectively. Either a abuts on the left-hand-side of b and b abuts on* *the left-hand-side of c; or else c and b abut on the right-hand-side of b and a respectively. The region g determined by (a, b, AB) is transformed into the region g' determined by (b, c, BC). Both g and g' abut on the upper side of ABC; these two regions have no interior point in common.* (cf. Fig. 4.)

Let P denote the extremity of b and P' the extremity of a or of c, which lies on the arc b; the point P' is the image of P by the inverse or direct transformation. The arc BbP' belongs to the boundaries of both of the regions g and g'. The arc PbP' belongs to the boundary of just one of these regions while it lies in the exterior of the other region. This arc PbP' will be called the *free arc* of b; it is obviously a *translation-arc*. That side of the free arc which is turned towards the exterior of the regions g, g' will be called its *free side.*

2. Method of construction of a transformation-field.

2. 1 The quantities ε and η.

Denote in general by R_n the square $-n \leqq x \leqq n$, $-n \leqq y \leqq n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Let ε_n be the minimal distance of an arbitrary point of R_n from its direct or inverse image. Denote by η_n the largest number between 0 and $\varepsilon_n/2$ such that two arbitrary points of R_n whose distance is less than or equal to η_n are carried by the direct (or inverse) transformation into two points whose distance is less than or equal to $\varepsilon_n/2$.

2. 2 Determination of a base-point on the free segment.

Apply Theorem IV to the case where b is a straight segment perpendicular to the segment AC. Let a variable point describe the perpendicular to AC starting upwards from the point B to the first point for which the described path b and its image have a common point; denote by a and c the inverse and the direct image of b respectively. Let P' denote the extremity of a or of c which lies on b. Suppose, to fix our ideas, P' to be the direct image of P. Denote by $P'P''$ and by $P^{-1}P$ the arcs into which the segment PP' is carried by the direct and by the inverse transformation, respectively.

Let R_n be the smallest square (n integer) which contains P and P'; ε_n and η_n signify the quantities defined in 2. 1. We understand by a *mid-segment* of PP' that segment of PP' whose extremities are distant η_n from P and P' respectively.

We understand by a *base-point* B_1 a point of the mid-segment of PP' such that there exists a segment perpendicular to PP', starting from B_1 towards the free side of PP', which meets its own image and does not meet the direct or inverse image of PP'.

The *existence of a base-point* can be shown by the following consideration. Let S be an arbitrary point of the mid-segment of PP'; take the perpendicular to PP' starting from the point S towards the free side of PP' and denote by S_1 its first point belonging to $P^{-1}P+P'P''$. Suppose that contrary to our statement, no segment SS_1 meets its image. An immediate application of Theorem II', having regard to the determination of η_n, leads to the result that if S lies within η_n of P or P' the corresponding point S_1 belongs in the first case to the arc $P^{-1}P$, in the second case to the arc $P'P''$. Those points S of the mid-segment for which the point S_1 belongs to the arcs $P^{-1}P$, and $P'P''$ form two intervals; let S^* be their common extremity (Fig. 5.). Denote by S_1^* and S_2^* the first points of the perpendicular to PP' starting from S^* towards the free side of PP', which belong to $P'P''$ and $P^{-1}P$ respectively; suppose for instance that S_1^* lies between S^* and S_2^*. We have assumed that the segment $S^*S_1^*$ does not meet its image; in consequence of Theorem II' the direct image T^* of S^* must then lie on the subarc S_1^*P'' of the arc $P'P''$. According to whether the inverse image Q^* of S^* belongs to the subarc PS_2^* or $S_2^*P^{-1}$ of PP^{-1} apply Theorem II' to the segment $\lambda = S^*S_2^*$ and $\lambda = S_1^*S_2^*$ respectively; hence we obtain that the segment $S^*S_2^*$ intersects its image. The same holds valid of a segment SS_1 whose origin S is a point on PS^* near the point S^*. From this contradiction of our assumption the existence of a base-point follows as stated above.

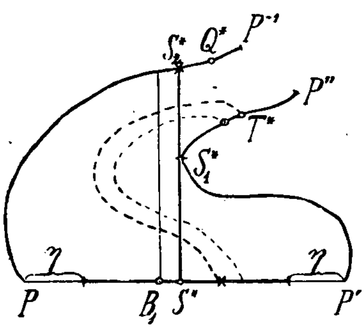

Fig. 5.

The *construction is continued in the following way.* We determine a base-point B_1 on the free segment PP' and take the perpendicular to PP' starting from B_1 towards the free side, as far as the first point P_1 for which the segment B_1P_1 meets its image; let P_1' be the (direct or inverse) image of P_1 lying on the segment B_1P_1; we determine on the free segment P_1P_1' a base-point B_2 and take the perpendicular to P_1P_1' starting from B_2 towards the free side of P_1P_1'; and so on.

At every stage of this process the broken line $BB_1B_2 \ldots B_kP_k$ is to be considered as an arc b abutting on its image and thus Theorem IV may be applied.

Another important feature of this process is that *the continuation of the construction is uniquely determined by the last free segment P_kP_k' (and the base point B_{k+1}) and thus does not depend on the preceding part of the polygonal line $BB_1B_2 \ldots$*

2. 3 Deviation of the path.

Let l be an infinite straight line parallel to the x or y axis. We understand by *deviation of the path by the line l* the following modification of the above construction.

Retaining the notations of 2. 2, take the perpendicular to PP' starting from B_1 towards the free side of PP'; let M be the first point of this line on l. If the segment B_1M does not meet its image, we proceed on l from M in either of the two directions up to the first point P_1 (or $\overline{P}_1$) such that the broken line B_1MP_1 (or $B_1M\overline{P}_1$) meets its image.

Applying Theorem IV to this case we determine the free arc P_1P_1' (or $\overline{P}_1\overline{P}_1'$) on the broken line B_1MP_1 (or $B_1M\overline{P}_1$). If one of these free arcs consists of a single straight segment we can determine on this a base-point accordingly to 2. 2 and carry on the construction. The same is valid if the free arc P_1P_1' (or $\overline{P}_1\overline{P}_1'$) is composed of two straight segments provided that the free side corresponds to the angle $\pi/2$. If each of the free arcs P_1P_1' and $\overline{P}_1\overline{P}_1'$ consists of two segments and the angle corresponding to the free side is $3\pi/2$ for both of them, then the line B_1MP_1 abuts on its direct, the line $B_1M\overline{P}_1$ on its inverse image (or vice versa) (Fig. 6.). Describe the segment MP_1 from M up to the first point T which belongs to the direct or inverse image of $M\overline{P}_1$; let S be the inverse or direct image of T, respectively. The segment ST is then a translation-arc; on this a base-point B_2 can be determined according to the result of 2. 2. From the base-point

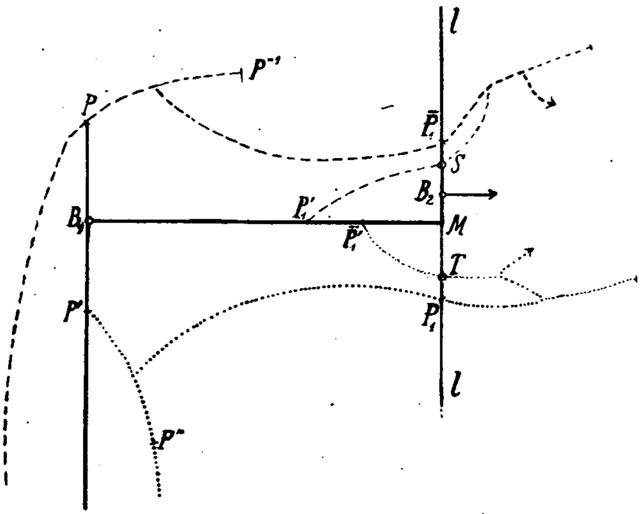

Fig. 6.

B_2 we carry on the construction in conformity with the above description.

We would emphasize that *if after deviation the line $BB_1B_2\ldots$ crosses the line l (that is to say if B_1 and B_3 lie on opposite sides of l) then the corresponding base-point B_2 belongs to a translation-arc ST of the line l.*

3. The plane translation theorem of Brouwer.

Let t be a topological transformation of plane into itself which preserves the sense of orientation and has no invariant point. We understand by a *translation-field* a region lying outside its image, and bounded by two simple open lines such that one of these lines is the image of the other one by the given transformation. By a *simple open line* is meant a topological image of the infinite straight line such that points of the straight line converging to infinity correspond to a similar sequence of points on the simple open line.

The *theorem of* BROUWER *on plane translations* can be stated as follows:

If a sense-preserving topological transformation of the plane into itself has no invariant point, a translation-field can be constructed which contains any given point of the plane.

Construct a translation-arc AB through the given point (cf. 1. 2) and determine a system of rectangular coordinates x, y in such a way that AB and its image BC on the x axis are represented as segments of unit length. B is the origin of coordinates and C is to the right of B.

Take the perpendicular to AC starting upwards from B and describe this up to the first point P for which the segment BP and its image meet. Let P' be the (direct or inverse) image of P belonging to the segment BP. On the free segment PP' we choose a base-point B_1 (cf. 2. 2) and take the perpendicular to PP' starting from B_1 towards the free side of PP'; and so on.

If at any stage of this process a base-point B_k lies outside the square R_{n+1} and inside R_{n+2}, furthermore if the perpendicular to $P_{k-1}P'_{k-1}$ starting from B_k abuts on a side, say $y=n$, of the square R_n before meeting its own image, then we proceed on the line $y=n$ in either of the two directions and determine the next base-point B_{k+1} accordingly to 2. 3.

The polygonal line $b = BB_1B_2\ldots$ obtained by indefinite continuation of this construction cannot return to a point of the segment ABC; otherwise a part of the line b and a segment of ABC together would form a simple closed polygon whose image would lie in its interior; inside this polygon the transformation would then have an invariant point.

Denote by a and c the inverse and the direct images of b respectively. From Theorem IV it follows that no two of the lines a, b, c have a common point; hence we also conclude that the line b cannot return to one of its anterior points.

We carry out the same construction starting from B towards the lower side of ABC and again denote the line $\ldots B_{-2}B_{-1}B\,B_1B_2\ldots$ by b, its images by a and c. The same considerations lead to the result that no two of the lines a, b, c have a common point.

In order to prove that b is a simple open line, let us first observe that any square R_{n+1} contains only a finite number of the base-points of the construction. For consider the complex of lines: $P_kP'_k + B_{k+1}B_{k+2}$. If $l \geqq k+2$, the complexes $P_kP'_k + B_{k+1}B_{k+2}$ and $P_lP'_l + B_{l+1}B_{l+2}$ have no point in common, in consequence of the construction. Every free segment (or free arc) which lies in R_{n+1} has a diameter $\geqq \varepsilon_{n+1}$; the base-point B_{k+1} is at a distance $\geqq \eta_{n+1}$ from the points P_k and P'_k, so that the segment $B_k B_{k+1}$ is of diameter $\geqq \eta_{n+1}$ for it contains the point P_{k+1}. The segment $B_{k+1} B_{k+2}$ contains then a straight segment of diameter $\geqq \eta_{n+1}$. The whole complex $P_k P_k' + B_{k+1} B_{k+2}$ consists essentially of three segments of length $\geqq \eta_{n+1}$ which are parallel to the axes. Hence it follows that there is only a finite number of base-points in the square R_{n+1}. Now a segment $B_k B_{k+1}$ of the line b whose origin B_k lies outside of R_{n+1} cannot enter into R_n; consequently there is only a finite number of segments $B_k B_{k+1}$ of the line b which have points inside of the square R_n. This means that a set of points lying on different segments of the line b cannot have any limiting point at finite distance, that is to say that the line b *is a simple open line.*

The lines a and b bound a translation-field whose image is the region bounded by the lines b and c; the two regions lie on different sides of the line b and they have no point in common.

This completes the proof of the plane translation theorem of BROUWER.

4. The last geometric theorem of Poincaré.

The theorem of POINCARÉ can be stated in the following form:

Consider a topological transformation of a ring-shaped plane surface into itself which displaces the points on the inner boundary in the negative, the points on the outer boundary in the positive sense. Either the transformation leaves at least one point invariant, or else there is a simple closed curve separating the two boundaries which lies completely inside its (direct or inverse) image.

Let us suppose that the transformation has no invariant point and construct a curve lying inside its image.

Let (r, φ) denote polar coordinates in the ring-shaped surface: $1 \leqq r \leqq 2$, and let the transformation be given by the formulae: $r' = R(r, \varphi)$, $\varphi' = \theta(r, \varphi)$. Determine the value of $\theta(r, \varphi)$ for points of the outer boundary $r = 2$ in such a way that $\varphi > \theta(2, \varphi)$; then for the inner boundary $\theta(1, \varphi) < \varphi$; this is the expression of the condition that the transformation turns the two boundaries in opposite senses.

We map the ring on to the strip: $1 \leqq y \leqq 2$, $-\infty < x < +\infty$ by means of the formulae: $y = r$, $x = -\varphi + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, where (x, y) denote rectangular coordinates in the plane. To the given transformation of the ring corresponds a topological transformation of the strip into itself with no invariant point, which is periodic in x, of period 2π. Denote by (x', y') the image of the point (x, y) then the relations exist: for $y=1 : x' > x$ and for $y=2 : x' < x$.

Denote by B the point $(x, y)=(0, 1)$. Starting from the point B describe the segment $x=0, 1 \leqq y \leqq 2$ up to the first point P for which the segment BP and its image meet. Denote by P' the direct or inverse image of P which lies on the segment BP. (cf. Theorem IV).[9]) Determine a base-point B_1 on the free segment PP', take the perpendicular to PP' starting from B_1 towards the free side and describe this up to the first point P_1 for which the segment B_1P_1 and its image meet. Let P_1' be the direct or inverse image of P_1 lying on the segment B_1P_1; on the free segment P_1P_1' determine a base-point B_2, take the perpendicular to P_1P_1' starting from B_2 towards the free side; and so on.

Denote by l_k the vertical segment $1 \leqq y \leqq 2, x = 2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ and by l any one of them. Let l^1 and l^{-1} be the direct and the inverse images of l respectively. We may assume that *the arcs l and l^{-1} have only a finite number of common points*;[10]) denote them by $H_1, H_2, \ldots, H_n$ and their images by $H_1', H_2', \ldots, H_n'$; the H'-s are the common points of l^1 and l. Consider the segments H_iH_i'; if one of them, say H_jH_j' contains another segment H_iH_i' then we omit H_jH_j'; those which remain will be denoted by $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(r)}$. (Such segments lying on l_k will be denoted by $\lambda_k^{(1)}, \lambda_k^{(2)}, \ldots, \lambda_k^{(r)}$.) Each segment $\lambda^{(i)}$ is a *translation-arc*, for its extremities correspond to one another by the transformation and the segment does not contain any other pair of points corresponding to each other by the transformation. The $\lambda^{(i)}$'s are the only translation-arcs on the segment l.

An initial part of the line $b = BB_1B_2\ldots$ constructed by the above process is contained in the rectangle between l_0 and l_1 (or between l_{-1} and l_0; suppose however the first, to fix the ideas). *The line b cannot abut on the lines $y=1$ or $y=2$*; the first part

9) From the preliminary considerations of paragraph I. we need for Poincaré's theorem only the lemma I. 1 in a weaker form and as its direct consequence, the theorems III and IV.

10) Otherwise we subdivide l into a finite number of sufficiently small segments and replace every one of them by an approximating arc of the same extremities which meets l, l^1 and l^{-1} in a finite number of points (cf. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie, I., Berlin 1923, p. 89. Satz II.). We consider then instead of l the line obtained by this modification.

of this statement is an obvious consequence of the construction; the second part follows from the condition that the points on $y=1$ and on $y=2$ are displaced in the opposite senses, so that the line b whose origin lies on the line $y=1$ and whose extremity would lie on the line $y=2$ would intersect its image.

An essential feature of the construction is that any finite part of the plane contains only a finite number of the base-points of the construction (cf. § 3.). Consequently the line b must leave the rectangle between l_0 and l_1 at some stage of the construction. Let M be the first point of b on the segment l $(=l_0, l_1)$. We *deviate the path by the segment* l, that is to say we proceed from the point M along the segment l upwards or downwards as far as the first point for which the path and its image meet. From the result of 2. 3 it follows that if after deviation the line b crosses the line l, the corresponding base-point lies on a translation-arc of l, that is to say on a segment $\lambda^{(i)}$.

We carry on the construction of the line b in the same way and deviate it by each segment l on which it abuts. In this way we obtain a line b such that b crosses any one of the segments l only on the translation-arcs $\lambda^{(i)}$. (Fig. 7.)

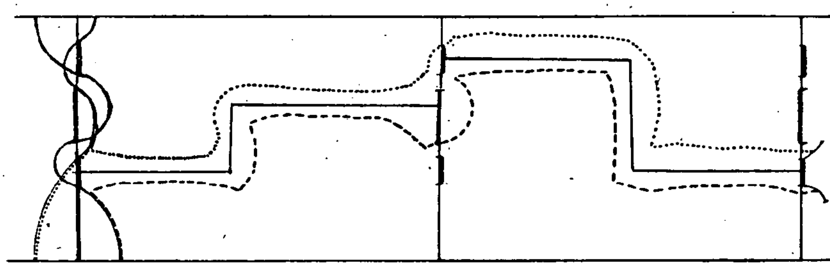

Fig. 7.

After sufficiently long continuation of the construction the line b must leave the rectangle between l_{-r} and l_r (r denotes the number of the translation-arcs $\lambda^{(i)}$ on l). Consequently there are two segments l_m and l_n which are crossed by b on congruent translation-arcs $\lambda_m^{(i)}$ and $\lambda_n^{(i)}$ (of the same superscript i). Suppose that b meets the translation-arc $\lambda_m^{(i)}$ before the translation-arc $\lambda_n^{(i)}$. We keep only that part of the line b which ends at $\lambda_n^{(i)}$. Now we choose on $\lambda_n^{(i)}$ the same base-point as on $\lambda_m^{(i)}$ and carry on the construction in a periodic way (of period $2\pi\omega$, where ω denotes the integer $m-n\neq 0$); this is possible in consequence of the periodicity of the transformation in x and of the characteristic of the process that the continuation is determined only by the last free segment (cf. 2. 2).

The line b obtained in this way does not intersect its image; b is periodic in x, of period $2\pi\omega$, apart from a certain initial part of b. Omit this initial part of b and from the remaining part construct by the translations $x' = x + 2k\pi\omega$, $y' = y$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ an open line W which is totally periodic in x, of period $2\pi\omega$. Then the line W does not intersect its image; in other words the line W separates its direct or inverse image from the line $y = 1$. The same holds true of the lines $W_0, W_1, W_2, \ldots, W_{\omega-1}$ obtained from $W = W_0$ by the translations $x' = x + 2k\pi$, $y' = y$, $(k = 0, 1, \ldots, \omega - 1)$. The lines $W_0, W_1, \ldots, W_{\omega-1}$ together determine a region abutting on the line $y = 1$ whose other boundary is formed by a *simple open line W^* periodic in x, of period 2π.* The line W^* separates its direct or inverse image from the line $y = 1$.

To the line W^* corresponds in the ring-shaped surface a simple closed curve which separates the two boundaries from one another and which lies in the interior of its direct or inverse image.

Thus the theorem of Poincaré is proved. I called attention in my „Vorlesungen über Topologie," I., p. 210. to the possibility of proving Poincaré's theorem by an adequate construction of a translation-field.

*

The extension of the theorem given by Birkhoff concerning transformations which take the ring into another ring with the same inner boundary, can be proved in the same way. The profound result of Birkhoff on the existence of *two distinct invariant points* can be deduced by an accurate investigation of the structure of the transformation near an invariant point. I propose to return to these questions in a subsequent communication.

University of Szeged, June 14, 1928.

(*Received June 14, 1928*)

Zur Charakteristikentheorie.

Von ALFRED HAAR in Szeged.

Einleitung.

Um die in der vorliegenden Note behandelte Frage zu beleuchten, wollen wir einige kritische Bemerkungen über die klassische Theorie der partiellen Differentialgleichung

$$F(p, q, z, x, y) = 0 \tag{I}$$

vorausschicken, wo — wie üblich — die ersten Ableitungen der unbekannten Funktion $z(x, y)$ nach x bzw. y mit p bzw. q bezeichnet wurden. Um Schwierigkeiten, an die es hier nicht ankommt, vorzubeugen, wollen wir annehmen, dass alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion $F(p, q, z, x, y)$ für die in Betracht kommenden Wertsysteme stetige Funktionen der fünf Argumente sind.

Vermöge der Charakteristikentheorie wird der Gleichung (I) das folgende System von 5 gewöhnlichen Differentialgleichungen zugeordnet:[1])

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = F_p, \quad \frac{dy}{dt} = F_q, \quad \frac{dz}{dt} = pF_p + qF_q, \\ &\frac{dp}{dt} = -(F_x + pF_z), \quad \frac{dq}{dt} = -(F_y + qF_z), \end{aligned} \tag{II}$$

und man interpretiert die die Bedingung $F(p, q, z, x, y) = 0$ erfüllenden Lösungen von (II) als die charakteristischen Streifen von (I). Die Grundlage der Charakteristikentheorie ist die folgende Tatsache:

Ist $z = \varphi(x, y)$ eine Lösung von (I), deren Ableitungen zweiter Ordnung in einer Umgebung der Stelle x_0, y_0 existieren,

[1]) Wir bezeichnen — wie üblich — die partiellen Ableitungen einer Funktion durch Hinzufügung der entsprechenden Indizes.

$$z_0=\varphi(x_0,y_0),\quad p_0=\varphi_x(x_0,y_0),\quad q_0=\varphi_y(x_0,y_0),$$

sind ferner die Ableitungen zweiter Ordnung von $F(p, q, z, x, y)$ stetige Funktionen in der Umgebung der Stelle x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, so dass die Gleichungen (II) *eine Lösung $x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)$ besitzen, für die*

$$x(0)=x_0,\ y(0)=y_0,\ z(0)=z_0,\ p(0)=p_0,\ q(0)=q_0$$

ist, so ist für hinreichend kleine $|t|$

$$z(t)=\varphi(x(t), y(t)),\ p(t)=\varphi_x(x(t), y(t)),\ q(t)=\varphi_y(x(t), y(t)),$$

d. h. die betrachtete Lösung von (I) *„enthält" den charakteristischen Streifen, den die Lösungen von* (II) *definieren.*

Auf diesen Satz stützt sich die Integrationstheorie von (I), die natürlich auch einen Existenzbeweis für die Lösbarkeit dieser Gleichung liefert, und zwar den allgemeinsten der überhaupt gegeben wurde. Ich betone noch, dass *die Existenz der zweiten Ableitungen von $\varphi(x, y)$* bei dem Beweise des obigen Satzes *unerlässlich ist;* diese Tatsache ist in verschiedenen Lehrbüchern — auch in den allerneusten — oft übersehen worden und führte daher zu Schlüssen (beispielsweise über die Unizität der Lösungen von (I)), die nicht statthaft sind.

Wir bezeichnen mit

$$\begin{aligned} x&=x(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),\quad y=y(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),\\ z&=z(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),\quad p=p(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),\\ q&=q(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)\end{aligned}\tag{III}$$

diejenigen Lösungen von (II), die für $t=0$ bzw. in x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 übergehen. Unter der gemachten Annahme, dass alle zweiten Ableitungen von F in einer Umgebung *(U)* der Stelle x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 stetige Funktionen sind, existieren *alle* ersten Ableitungen der obigen Funktionen (III) nach den Veränderlichen $t, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0$ in einer gewissen Umgebung der betrachteten Stelle.

Um den Hauptsatz dieser Theorie in exakter Weise formulieren zu können, betrachten wir eine Kurve im x, y, z-Raume

$$x=\bar{x}(\tau),\quad y=\bar{y}(\tau),\quad z=\bar{z}(\tau),\tag{IV}$$

wo $\bar{x}(\tau)$, $\bar{y}(\tau)$, $\bar{z}(\tau)$ in einem Intervall $\tau' \leqq \tau \leqq \tau''$ stetig differenzierbare Funktionen bedeuten, und bestimmen einen hindurchgehenden Streifen, indem wir $\bar{p}(\tau)$ und $\bar{q}(\tau)$ aus den Gleichungen

$$\frac{d\bar{z}}{d\tau}=\bar{p}\,\frac{d\bar{x}}{d\tau}+\bar{q}\,\frac{d\bar{y}}{d\tau},\quad F(\bar{p}, \bar{q}, \bar{z}, \bar{x}, \bar{y})=0\tag{IV'}$$

berechnen; wir nehmen an, dass diese Berechnung möglich ist, und dass man solche stetige Funktionen $\bar{p}(\tau)$, $\bar{q}(\tau)$ gewinnt, dass der Wertevorrat der 5 Funktionen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}$ (für die betrachteten Werte von τ) in der obigen Umgebung *(U)* liegt.

Alsdann sind

$$X(t, \tau) = x(t; \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \bar{z}(\tau), \bar{p}(\tau), \bar{q}(\tau)),$$
$$Y(t, \tau) = y(t; \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \bar{z}(\tau), \bar{p}(\tau), \bar{q}(\tau)),$$
$$Z(t, \tau) = z(t; \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \bar{z}(\tau), \bar{p}(\tau), \bar{q}(\tau))$$

(für die betrachteten Werte von t und τ) jedenfalls stetige Funktionen der beiden Variablen, die in Bezug auf t differenzierbar sind und das Gleichungssystem (II) befriedigen. Wenn ferner weder der Streifen

$$x = \bar{x}(\tau), \; y = \bar{y}(\tau), \; z = \bar{z}(\tau), \; p = \bar{p}(\tau), \; q = \bar{q}(\tau),$$

noch irgendein Teil desselben charakteristisch ist, so stellt

$$x = X(t, \tau), \; y = Y(t, \tau), \; z = Z(t, \tau) \tag{V}$$

eine Fläche dar, da die Parameterlinien $t =$ konst. und $\tau =$ konst. verschieden sind. *Unter der weiteren Annahme, dass X, Y, Z auch nach τ differenzierbar sind,* kann man auf eine sinnreiche (von Cauchy herrührende) Weise zeigen, dass die Fläche (V) eine (die Kurve (IV) enthaltende) Lösung der vorgelegten Gleichung (I) darstellt. Um die Existenz dieser Ableitungen zu sichern, muss man — da die in (III) vorkommenden Funktionen nach allen Veränderlichen differenzierbar sind — eine Annahme über $\bar{p}(\tau)$, $\bar{q}(\tau)$ machen, etwa die Differenzierbarkeit dieser Funktionen. Da diese Funktionen aus (IV') berechnet wurden, so ist diese Bedingung erfüllt, falls $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ *zweimal stetig differenzierbare* Funktionen sind. Man gewinnt also den Satz, dass *falls die angegebenen Bedingungen erfüllt sind, $\bar{x}(\tau)$, $\bar{y}(\tau)$, $\bar{z}(\tau)$ aber zweimal stetig differenzierbare Funktionen bedeuten, die keine Charakteristik darstellen, so besitzt die vorgelegte Gleichung* (I) *eine Lösung $z = \varphi(x, y)$ für die*

$$\bar{z}(\tau) = \varphi(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))$$

ist.

In den üblichen Darstellungen dieser Theorie wird häufig die zweimalige Differenzierbarkeit der gegebenen Kurve (IV) ausser Acht gelassen und man begnügt sich mit der Annahme, dass

$\bar{x}(\tau)$, $\bar{y}(\tau)$, $\bar{z}(\tau)$ einmal differenzierbare Funktionen sind. Freilich ist dieser Schluss anfechtbar, da man daraus nicht schliessen kann, dass die aus (IV′) berechneten Funktionen $\bar{p}(\tau)$, $\bar{q}(\tau)$ differenzierbar sind, folglich, dass die durch die Charakteristikentheorie gelieferte Fläche (V) Ableitungen besitzt. Daher kann auch keine Rede davon sein, dass diese Fläche eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (I) darstellt. Dies ist ein bemerkenswerter Umstand; obwohl die vorgelegte Differentialgleichung nur Ableitungen erster Ordnung enthält, *so genügt für die vorgelegte Kurve die Forderung der einmaligen Differenzierbarkeit nicht* um stets zu einer Lösung zu gelangen, wenigstens nicht auf den durch die Charakteristikentheorie gelieferten Weg.

Dadurch wird nun die Frage nahe gelegt, ob dieser Umstand im Wesen des Problems liegt oder nur eine Eigenschaft der Behandlungsweise (durch die geschilderte Charakteristikentheorie) ist? Es handelt sich also um die Frage, ob es Lösungen der Differentialgleichung (I) gibt, die durch die Charakteristikentheorie nicht geliefert werden können; solche Lösungen können allerdings nicht zweimal differenzierbar sein, was aber auch gar nicht nötig ist.

Die vorliegende Note enthält das Resultat, dass die aufgeworfene Frage verneinend zu beantworten ist für eine sehr allgemeine Klasse von Differentialgleichungen (I). Die Grundidee unseres Beweises kann natürlich nicht aus der Charakteristikentheorie entspringen; es müssen allgemeinere, umfassendere Sätze über die Lösungen von (I) gewonnen werden um zu diesem Satz zu gelangen; diese sollen im § 1 entwickelt werden.

§ 1. Hülfssätze.[2])

Die Grundlage unserer Betrachtungen ist das folgende

L e m m a. *Es sei $z(x,y)$ eine im Dreieck*

$$x \geq 0,\ y \geq (x-x'),\ y \leq -(x-x''),\ (x''>x')$$

definierte Funktion, deren erste Ableitungen nach x und y (die wir mit p und q bezeichnen) daselbst stetige Funktionen sind, und es

[2]) [Anmerkung während der Korrektur.] Die in diesem §. gewonnenen Sätze schliessen sich unmittelbar an die Resultate an, die ich kürzlich in den *Comptes Rendus* (2. Juli 1928) veröffentlicht habe. („Sur l'unicité des solutions....“). Vgl. auch insbesondere die anschliessenden Bemerkungen von Herrn HADAMARD.

sei für jede Stelle dieses Gebietes

$$|q| \leqq |p| + |z|. \qquad (U)$$

Ist M *der Maximalwert der Funktion* $|z(x, y)|$ *längs der Seite* $y = 0$ *des Dreiecks, d. h.*

$$|z(x, 0)| \leqq M, \quad \text{für} \quad x' \leqq x \leqq x'',$$

so ist an jeder Stelle des betrachteten Dreiecks

$$|z(x, y)| \leqq M e^{y}.$$

In der Tat, würde es eine Stelle (x_0, y_0) innerhalb dieses Dreiecks oder auf der Peripherie desselben geben, wo etwa

$$z(x_0, y_0) > M e^{y_0}$$

wäre, so wäre auch für hinreichend kleine positive δ

$$z(x_0, y_0) > M e^{(1+\delta) y_0}$$

Wir denken uns eine positive Grösse δ von dieser Beschaffenheit fixiert und betrachten die Funktion

$$Z(x, y) = e^{-(1+\delta) y} z(x, y),$$

die ebenfalls im obigen Dreieck definiert ist und ihr Maximum jedenfalls nicht auf der Geraden $y = 0$ annimmt, da ja für $y = 0$

$$Z(x, 0) = z(x, 0) \leqq M,$$

für $x = x_0$, $y = y_0$ aber

$$Z(x_0, y_0) > M$$

ist. Es sei x_1, y_1 diejenige Stelle, wo $Z(x, y)$ ihren Maximalwert (der also $> M$ ist) annimmt. Da dieser Punkt nicht auf der Geraden $y = 0$ liegen kann, so ist jedenfalls für hinreichend kleine positive h

$$Z(x_1, y_1) \geqq Z(x_1 - h, \; y_1 - h),$$

und

$$Z(x_1, y_1) \geqq Z(x_1 + h, \; y_1 - h),$$

da die Punkte $(x_1 - h, \; y_1 - h)$ und $(x_1 + h, \; y_1 - h)$ für hinreichend kleine positive h innerhalb oder auf der Peripherie des betrachteten Dreiecks liegen. Daher ist für $h = 0$

$$\frac{dZ(x_1 - h, \; y_1 - h)}{dh} \leqq 0, \quad \frac{dZ(x_1 + h, \; y_1 - h)}{dh} \leqq 0,$$

d. h. es ist für $x = x_1$, $y = y_1$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} = e^{-(1+\delta) y} (q + p - (1 + \delta) z) \geqq 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} = e^{-(1+\delta) y} (q - p - (1 + \delta) z) \geqq 0.$$

Daraus folgt aber, dass

$$q(x_1, y_1) - |p(x_1, y_1)| \geqq (1+\delta)\, z(x_1, y_1)$$

ist; diese Ungleichung liefert aber in Verbindung mit der angenommenen Ungleichung *(U)* — aus der unmittelbar

$$q - |p| \leqq |z(x, y)|$$

folgt — die Ungleichung

$$|z(x_1, y_1)| \geqq (1+\delta)\, z(x_1, y_1).$$

Diese Ungleichung ist aber mit $\delta > 0$ und $z(x_1, y_1) > 0$ im Widerspruch; die letzte Ungleichung muss statthaben, da ja

$$Z(x_1, y_1) = e^{-(1+\delta)y_1} z(x_1, y_1) > M \geqq 0$$

ist. In genau derselben Weise zeigt man die Unmöglichkeit der Ungleichung

$$z(x_0, y_0) < -M e^{y_0},$$

womit unser Lemma bewiesen ist.

Der soeben bewiesene Satz ist einer geringen Verallgemeinerung fähig, wenn man an Stelle der Veränderlichen x, y durch die Relationen

$$x = A\bar{x}, \quad y = B\bar{y}$$

(wobei A und B positive Konstanten bedeuten) neue Variable einführt. Man erhält auf diese Weise — wenn man zur Abkürzung $\frac{B}{A} = L$ einführt — den folgenden Satz:

Es sei $z(x, y)$ eine im Dreieck

$$y \geqq 0, \quad y \geqq \frac{1}{L}(x - x'), \quad y \leqq -\frac{1}{L}(x - x'')$$
$$x' < x'', \quad L > 0$$

definierte Funktion, deren erste Ableitungen nach x und y daselbst stetige Funktionen sind, und es sei für jede Stelle dieses Gebietes

$$|q| \leqq L|p| + B|z|, \quad (B > 0).$$

Ist M der Maximalwert der Funktion $|z(x, y)|$ längs der Geraden $y = 0$, so ist für jede Stelle des betrachteten Dreiecks

$$|z(x, y)| \leqq M e^{By}.$$

Dieser Satz bleibt offenbar richtig, wenn die Funktion $z(x, y)$ nur für solche Stellen des obigen Dreiecks definiert ist, deren

y-Koordinate unterhalb einer positiven Grenze y'' bleibt, d. h. wenn der Definitionsbereich dieser Funktion das durch die Geraden

$$y=0,\quad y=\frac{1}{L}(x-x'),\quad y=-\frac{1}{L}(x-x''),\quad y=y''$$

begrenzte Viereck ist, da der obige Beweis wörtlich auch für diesen Fall gilt.

Wir betrachten nun eine partielle Differentialgleichung von der Form

$$q+f(p,z,x,y)=0 \tag{1}$$

und nehmen, an, dass die Funktion $f(p,z,x,y)$ stetig in dem durch die Ungleichungen

$$x'\leqq x\leqq x'',\quad 0\leqq y\leqq y'', \tag{2'}$$
$$z'\leqq z\leqq z'',\quad p'\leqq p\leqq p'' \tag{2''}$$

definierten Bereich ist, und in Bezug auf die Veränderlichen z und p die LIPSCHITZsche Bedingung erfüllt:

$$|f(p,z,x,y)-f(\bar{p},\bar{z},x,y)|\leqq L_1|p-\bar{p}|+L_2|z-\bar{z}|, \tag{3}$$

wobei L_1 und L_2 positive Konstante bedeuten. Es seien ferner $z_1(x,y)$ und $z_2(x,y)$ zwei Lösungen der partiellen Differentialgleichung (1), (mit *stetigen* Ableitungen 1. Ordnung,) die für solche Werte von x und y definiert sind, die die Ungleichungen (2') erfüllen und so beschaffen sind, dass daselbst die Ungleichungen

$$z'\leqq z_1(x,y)\leqq z'',\quad p'\leqq p_1(x,y)\leqq p'',$$
$$z'\leqq z_2(x,y)\leqq z'',\quad p'\leqq p_2(x,y)\leqq p''$$

statthaben, wobei zur Abkürzung

$$p_1=\frac{\partial z_1}{\partial x},\quad q_1=\frac{\partial z_1}{\partial y},\quad p_2=\frac{\partial z_2}{\partial x},\quad q_2=\frac{\partial z_2}{\partial y}$$

gesetzt wurde. Man erhält durch Subtraktion

$$|q_1-q_2|=|f(p_1,z_1,x,y)-f(p_2,z_2,x,y)|$$
$$\leqq L_1|p_1-p_2|+L_2|z_1-z_2|$$

und das oben gewonnene Resultat angewandt auf die Funktion $z=z_1-z_2$ liefert den folgenden

Satz: *Sind die Voraussetzungen, die wir für die Differentialgleichung* (1) *und für die Lösungen* $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ *derselben gemacht haben, erfüllt, und bezeichnen wir mit* M *das Maximum der Funktion*

$$|z_1(x,0)-z_2(x,0)|$$

für $x' \leqq x \leqq x''$, so gilt für jede Stelle des durch die Geraden

$$y=0, \quad y=\frac{1}{L_1}(x-x'), \quad y=-\frac{1}{L_1}(x-x''), \quad y=y'$$

begrenzten Viereckes die Ungleichung

$$|z_1(x,y)-z_2(x,y)| \leqq M e^{L_2 y}.$$

Die Bedeutung dieses Satzes besteht darin, dass man für die Differenz zweier Lösungen von (1) im obigen Viereck eine obere Schranke gewinnt auf Grund der maximalen Abweichung dieser Lösungen längs der Geraden $y=0$. Der Satz enthält die Aussage *über die Stetigkeit der Lösungen als Funktionen-Funktion der Anfangswerte betrachtet,* indem wir als Anfangswerte diejenige Werte betrachten, die die Lösung für $y=0$ annimmt.

Wir haben unseren Satz für Differentialgleichungen von der Form (1) und Anfangswerte längs $y=0$ abgeleitet. Durch eine wohlbekannte Schlussweise kann man dieses Resultat auf Gleichungen von der Form (I) und auf solche Anfangsdaten übertragen, die nicht Charakteristiken von (I) sind.

Es sei noch hervorgehoben, dass die Existenz der Ableitungen zweiter Ordnung der fraglichen Lösungen nicht vorausgesetzt wurde; unser Satz ist also unabhängig davon, ob diese Lösungen durch die Charakteristikentheorie gewonnen werden können.

§ 2. Anwendung auf die Charakteristikentheorie.

Um den vorangehenden Satz auf die Charakteristikentheorie anzuwenden, nehmen wir der Einfachheit halber an, und um Schwierigkeiten, auf die es hier nicht ankommt, zu vermeiden, dass alle partiellen Ableitungen der in der Differentialgleichung

$$q+f(p,z,x,y)=0 \tag{1}$$

auftretenden Funktion $f(p,z,x,y)$ für alle reellen Werte von p, z, x, y stetig sind, und dass die Ableitungen erster Ordnung dem Betrage nach unterhalb einer positiven Grenze L bleiben. Die LIPSCHITZsche Bedingung (3) ist dann erfüllt. und es lautet das zugehörige Differentialgleichungssystem der Charakteristiken wie folgt:

$$\frac{dx}{dt}=f_p, \quad \frac{dy}{dt}=1, \quad \frac{dz}{dt}=pf_p+q,$$
$$\frac{dp}{dt}=-(f_x+pf_z), \quad \frac{dq}{dt}=-(f_y+qf_z). \tag{4}$$

Wir bezeichnen mit

$$x=x(t;x_0,y_0,z_0,p_0,q_0),\ y=t+y_0,\ z=z(t;x_0,y_0,z_0,p_0,q_0),$$
$$p=p(t;x_0,y_0,z_0,p_0,q_0),\ q=q(t;x_0,y_0,z_0,p_0,q_0) \tag{4'}$$

dasjenige Lösungssystem von (4), das für $t=0$ bzw. in x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 übergeht. Die Variable t variiert dabei in einer Umgebung von $t=0$, die natürlich noch von der Wahl von x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 abhängt. Wenn wir aber diese Grössen einer Einschränkung von der Form

$$|x_0|\leqq C,\ |y_0|\leqq C,\ |z_0|\leqq C,\ |p_0|\leqq C,\ |q_0|\leqq C$$

unterwerfen (wo unter C irgendeine positive Konstante zu verstehen ist), so existiert sicherlich eine nur von C abhängende positive Grösse T derart, dass die Funktionen (4′) für $|t|\leqq T$ definiert sind; diese Funktionen sind natürlich nach allen Veränderlichen einmal stetig differenzierbar.

Wir betrachten eine stetig differenzierbare Kurve in der x, z-Ebene; ihre Gleichung sei

$$x=\tau,\ y=0,\ z=\overline{z}(\tau),\quad 0\leqq\tau\leqq\tau'',$$

und konstruieren nach den Vorschriften der Charakteristikentheorie die hindurchgehende Integralfläche von (1), wie folgt: Wir berechnen vorab den durch die Kurve hindurchgehenden Integralstreifen

$$p=\frac{d\overline{z}}{d\tau}=\overline{p}(\tau),\quad q=-f\left(\frac{d\overline{z}}{d\tau}, \overline{z}(\tau), \tau, 0\right)=\overline{q}(\tau);$$

die fragliche Fläche ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x&=x(t;\tau,0,\overline{z}(\tau),\overline{p}(\tau),\overline{q}(\tau))=X(t,\tau)\\ y&=t \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ =Y(t,\tau)\\ z&=z(t;\tau,0,\overline{z}(\tau),\overline{p}(\tau),\overline{q}(\tau))=Z(t,\tau). \end{aligned} \tag{5}$$

Bestimmen wir die Grösse C derart, dass für $0\leqq\tau\leqq\tau''$ die Funktionen τ, $\overline{z}(\tau)$, $\overline{p}(\tau)$, $\overline{q}(\tau)$ dem Betrage nach kleiner als C ausfallen, so sind die obigen Funktionen (5) für $0\leqq\tau\leqq\tau''$, $0\leqq t\leqq T$ jedenfalls definiert und stellen eine Fläche dar, die die vorgelegte

Kurve (für $t=0$) enthält. Die ersten Ableitungen dieser Funktionen (5) nach t sind stetige Funktionen; wenn auch die ersten Ableitungen nach τ existieren, so stellt die Fläche (5) bekanntlich die gesuchte Integralfläche dar. Hiezu ist jedenfalls hinreichend (nicht notwendig), dass die vorgelegte Kurve, d. h. die Funktion $\bar{z}(\tau)$ zweimal stetig differenzierbar sei, da dann die Differenzierbarkeit von $\bar{p}(\tau)$, $\bar{q}(\tau)$ unmittelbar, die Differenzierbarkeit der Funktionen (5) aber aus dem Umstande folgt, dass die Funktionen (4') nach allen Argumenten einmal differenzierbar sind.[3]) Lässt man aber die Annahme über die zweimalige Differenzierbarkeit von $\bar{z}(\tau)$ fallen, so kann es vorkommen — und zwar ist dies als der allgemeine Fall zu betrachten — dass die Fläche (5) bzw. die Funktion $z=\varphi(x, y)$, die man aus den Gleichungen (5) durch Elimination von t und τ erhält,[4]) keine partiellen Ableitungen erster Ordnung besitzt und daher auch keine Lösung der Differentialgleichung (1) darstellt. Wir wollen nun untersuchen, ob in diesem Falle, in dem also die Charakteristikentheorie versagt, die vorgelegte partielle Differentialgleichung überhaupt eine Lösung besitzt, die die gegebene Kurve enthält, wobei wir als Lösung eine die Differentialgleichung erfüllende Funktion mit stetigen Ableitungen erster Ordnung betrachten; wir werden sehen, dass *die gestellte Frage zu verneinen ist.*

Wir betrachten daher in einem solchen Falle die Fläche (5) und ziehen zur Hülfe eine Funktionenfolge $\bar{z}_n(\tau)$, (wobei $n= 1, 2, 3, \ldots$ ist) heran, deren Funktionen im obigen Intervall $0 \leq \tau \leq \tau'$ definierte *zweimal stetig differenzierbare* Funktionen sind von der Beschaffenheit, dass die Limesgleichungen

$$\bar{z}_n(\tau) \rightarrow \bar{z}(\tau), \quad \frac{d\bar{z}_n(\tau)}{d\tau} \rightarrow \frac{d\bar{z}(\tau)}{d\tau} \quad \text{für } n \rightarrow \infty \tag{6}$$

gleichmässig bestehen. Setzt man zur Abkürzung für jedes $n=1, 2, 3, \ldots$

---

3) Dass man die Gleichung der Fläche (5) — bzw. eines Teiles derselben — auf die Form $z=\varphi(x, y)$ bringen kann, beweist man bekanntlich indem man auf die Relation $\frac{d}{d\tau} X(0, \tau)=1$ Bezug nimmt.

4) Die Möglichkeit dieser Elimination muss natürlich vorausgesetzt werden, um zu Lösungen zu gelangen.

$$\overline{p}_n(\tau)=\frac{d\overline{z}_n'}{d\tau},\ \overline{q}_n(\tau)=-f\left(\frac{d\overline{z}_n}{d\tau},\ \overline{z}(\tau),\ \tau,\ 0\right),$$

so stellt für jedes n die Fläche

$$\begin{aligned} x&=x\,(t;\tau,0,\overline{z}_n(\tau),\overline{p}_n(\tau),\overline{q}_n(\tau))=X_n(t,\tau),\\ y&=t \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =Y_n(t,\tau),\\ z&=z\,(t;\tau,0,\overline{z}_n(\tau),\overline{p}_n(\tau),\overline{q}_n(\tau))=Z_n(t,\tau)\end{aligned}$$

jedenfalls eine stetig differenzierbare Lösung von (1) dar, die durch die Kurve $y=0,\ z=z_n(x)$ hindurchgeht. Wir nehmen an, dass die Gleichungen dieser Flächen (wenigstens für hinreichend grosse n), sowie die Gleichung der Fläche (5) für solche Werte der Veränderlichen x, y, die der Ungleichungen

$$x'\leqq x\leqq x'',\quad 0\leqq y\leqq y''$$

genügen, auf die Form

$$z=\varphi_n(x,y),\ \text{bzw.}\ z=\varphi(x,y)$$

gebracht werden können. Die Limesgleichung

$$\varphi_n(x,y)\to\varphi(x,y)\quad \text{für } n\to\infty$$

ist eine unmittelbare Folge der Stetigkeit der Funktionen (4′) und der Annahme (6); es ist ferner für jedes n

$$\varphi_n(x,0)=\overline{z}_n(x).$$

Würde es nun eine Lösung $\Phi(x,y)$ von (1) (mit stetigen ersten Ableitungen) geben, definiert für dieselben Werte von x, y, die längs der Geraden $y=0$ mit $\varphi(x,y)$ übereinstimmt:

$$\Phi(x,0)=\varphi(x,0)=z(x),$$

und bezeichnen wir das Maximum der Funktion $|z(x)-\overline{z}_n(x)|$ mit M_n, so würde der letzte Satz des § 1. die folgende Tatsache ergeben: In einem Viereck von der dort angegebenen Art gilt — zufolge unserer Annahme, dass die ersten Ableitungen der Funktion $f(p,z,x,y)$ dem Betrage nach kleiner als L bleiben — die Ungleichung

$$|\Phi(x,y)-\varphi_n(x,y)|\leqq M_n e^{Ly}.$$

Da aber die Grössen M_n mit wachsendem n gegen Null streben, so folgt daraus, dass in diesem Gebiet

$$\varphi_n(x,y)\to\Phi(x,y),\quad \text{für } n\to\infty$$

d. h. es ist

$$\Phi(x,y)=\varphi(x,y).$$

Mit anderen Worten *es kann* — unter den gemachten Voraussetzungen — *in dem betrachteten Viereck keine von* $\varphi(x, y)$ *verschiedene Lösung von* (1) *geben, die längs* $y=0$ *mit* $\bar{z}(x)$ *übereinstimmt.* Wenn daher — wie angenommen — diese Funktion $\varphi(x, y)$ — die durch die Charakteristikentheorie gelieferte Funktion — keine Ableitungen besitzt, so hat die vorgelegte partielle Differentialgleichung (1) keine Lösung dieser Art.

Wir haben uns auf Differentialgleichungen von der Form (1) beschränkt, auf die man die allgemeine Form (I) vermöge eines vielfach angewandten Verfahrens zurückführen kann. Dies würde keine wesentlichen Schwierigkeiten verursachen; es wäre aber interessant das gewonnene Resultat von den weiteren einschränkenden Annahmen, die wir zu Beginn dieses § gemacht haben, zu befreien, wobei — wie mir scheint — neue Schwierigkeiten auftreten.

(*Eingegangen am 16. Juli 1928*)

Bibliographie.

Beke Manó, Determinánsok (Természet és Technika 1. kötet), 232 oldal, Budapest, az Athenaeum kiadása.

[**Manó Beke, Determinanten,** 232 S., Budapest, Athenaeum-Verlag.]

Das vorliegende Buch bildet den ersten Band einer von Prof. BEKE herausgegebenen Sammlung, welche unter dem Gesamttitel *Natur und Technik* eine Reihe grundlegender Disziplinen der Mathematik und der exakten Naturwissenschaften dem ungarischen Leserkreis leichter zugänglich zu machen beabsichtigt.

Das Buch von BEKE führt den Leser auf leichtem und deswegen sicherem Wege zunächst in die allgemeine Theorie der Determinanten ein, und leitet ihn dann auch zur selbständigen Forschung an, indem ausser dem hergebrachten klassischen Stoffe auch die Ergebnisse der modernsten Forschung berücksichtigt werden. Die Darstellung weist zahlreiche Feinheiten auf, und die sorgfältige, elegante Behandlung der wichtigsten besonderen Determinanten ist vorzüglich geeignet, den Leser mit der Handhabung der Determinanten vertraut zu machen.

Nach einer Einleitung über Permutationen und über die Auflösung der Gleichungssysteme mit zwei bzw. drei Unbekannten folgt eine Darlegung der Grundeigenschaften der Determinanten, einschliesslich des LAPLACEschen Entwicklungssatzes. Als Anwendung werden im nächsten Kapitel die VANDERMONDEschen, WRONSKIschen, HANKELschen u. s. w. Determinanten betrachtet, die Kontinuanten, sowie die Differentiation der Determinanten erledigt. Dann wird ein Kapitel darüber eingeschaltet, wie man die formalen Determinantensätze mit Hilfe der alternierenden Zahlen übersichtlicher darstellen kann (was in den meisten Lehrbüchern nicht erwähnt wird). Es folgt die vollständige Diskussion des linearen Gleichungssystems, der Multiplikationssatz nebst einer Reihe wichtiger Anwendungen, und die auf symmetrische und schiefsymmetrische Determinanten bezüglichen wichtigsten Ergebnisse. Die Theorie der charakteristischen Gleichung bietet dem Verfasser die Gelegenheit, die seltener berücksichtigten Determinanten von KRONECKER bzw. von SCHOLTZ und HUNYADY zu besprechen. Die orthogonalen Determinanten sowie die quadratischen Formen werden mit derjenigen Ausführlichkeit und Sorgfalt behandelt, welche ihrer stets zunehmenden Bedeutung entspricht. Die Theorie der Resultanten und Diskriminanten beschliesst den eigentlichen klassisch-algebraischen Stoff. Die Untersuchung der GRAMschen Determinante, der Funktionaldeterminante sowie der unendlichen Determinanten eröffnen dem Leser wichtige Ausblicke über die Anwendbarkeit der vorgetragenen Lehren auf die Funktionentheorie. Zum Schluss wird ein Kapitel über geometrische Anwendungen geboten, und ein sehr interessant geschriebener historischer Überblick beschliesst das reichhaltige Werk.

Tibor Radó.

Pogány Béla, Az elektromágneses tér (Természet és Technika 3. kötet), 695 oldal, Budapest, az Athenaeum kiadása, 1927.

[**Béla Pogány, Das elektromagnetische Feld,** 695 S., **Budapest,** Athenaeum-Verlag, 1927.]

Das vorliegende Buch ist berufen, eine sehr empfindliche Lücke in der Reihe der ungarischen Lehrbücher der Physik auszufüllen.

Das Buch von B. Pogany behandelt die klassische Maxwellsche Elektrodynamik einschliesslich der elektromagnetischen Lichttheorie, die Lorentzsche Elektronentheorie und im Anschluss daran das Bohrsche Atommodell.

Aus dem reichhaltigen Inhalt möchten wir besonders die ausführliche Behandlung der ebenen Wellen in homogenen Medien hervorheben. Es werden unter anderem die wichtigen Untersuchungen von W. Voigt über inhomogene ebene Wellen referiert, sowie die genaue Theorie der Reflexion an einer planparallelen Platte gegeben, weiterhin wird die Fortpflanzung eines endlichen Wellenzuges erörtert. Die Aufnahme des letztgenannten Problems ist umso dankenswerter, da die fundamentalen Unterscheidungen zwischen Phasengeschwindigkeit und Signalgeschwindigkeit noch immer nicht allgemein genug bekannt sind und noch immer zu Missverständnissen, besonders in Bezug auf die Relativitätstheorie, führen.

In dem Abschnitt über Elektronentheorie wird ausser den Grundbegriffen eingehend die klassische Theorie der Dispersion erörtert, sowie das klassische Modell der Lichtquelle in der Absicht, den Fortschritt durch Quantentheorie ins rechte Licht zu setzen.

Ein letztes Kapitel behandelt das Bohrsche Atommodell einschliesslich des Zeemann- und Starkeffektes.

Wir möchten noch bemerken, dass in dem Buch unter anderem auch auf die Langevinsche Theorie des Paramagnetismus, auf die Röntgenstrahlen, Laueeffekt, die Grundtatsachen der Quantentheorie, sowie auf das Compton-effekt mehr oder weniger ausführlich eingegangen wird. Dagegen werden Erscheinungen an bewegten Körpern nicht behandelt, da in demselben Verlag von demselben Verfasser ein besonderes Werk über Relativitätstheorie in Vorbereitung sich befindet.

Die Darstellung ist klar und leicht verständlich, die Zwischenrechnungen sind meist sehr ausführlich durchgeführt und die leitenden Gesichtspunkte besonders hervorgehoben

Von mathematischen Hülfsmitteln sind ausser der Differential- und Integralrechnung nur die Hauptsätze der Vektoranalysis vorausgesetzt. Nur bei Behandlung des Starkeffektes wird die Hamilton-Jacobische Methode angewandt, deren etwas ausführlichere Auseinandersetzung besonders für Physiker, für die das Buch in erster Reihe bestimmt ist, allerdings vorteilhaft gewesen wäre.

Das Buch von Pogány können wir als einen entschiedenen Gewinn der ungarischen physikalischen Literatur begrüssen, dessen günstige Wirkung sich wohl sehr bald zeigen wird.

R. Ortvay.

Jordan Károly, Matematikai Statisztika (Természet és Technika 4. kötet), 316 oldal, Budapest, az Athenaeum kiadása.

[**Karl Jordan, Mathematische Statistik,** 316 S., Budapest, Athenaeum-Verlag.]

Das Buch stimmt im wesentlichen mit dem in französischer Sprache bei Gauthier-Villars unter dem Titel *Statistique mathématique* erschienenen Werke des Verfassers überein; es kann daher in sachlicher Beziehung auf die Besprechung dieses Werkes, *diese Acta* Bd. **3**, S. 254, verwiesen werden. Hier möge nur der Freude Ausdruck gegeben werden, dass das ausgezeichnete Werk nunmehr auch in ungarischer Sprache vorliegt.

Tibor Radó.

Ortvay Rudolf, Bevezetés az anyag korpuszkuláris elméletébe, első rész, 294 oldal, Budapest, a Magyar Tudományos Akadémia kiadása, 1927.

[**Rudolf Ortvay, Einführung in die Korpuskulartheorie der Materie,** erster Teil, 294 S., Budapest, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, 1927.]

Das Buch von Ortvay ist freudig zu begrüssen, als das erste in ungarischer Sprache geschriebene Werk über die modernsten Theorien der Materie und der Elektrizität. Es ist aus Universitätsvorlesungen hervorgegangen mit naturgemässen Ergänzungen. Das Buch will den Leser in die Methoden der korpuskularen Theorie einführen, ohne allzuviel spezielle Kenntnisse vorauszusetzen, sowie eine klare Übersicht geben über die wichtigsten Probleme und Ergebnisse, wobei auf manche noch ungelöste Fragen hingewiesen wird.

Den Experimentalphysiker berührt es angenehm, dass die Experimente durchgehend vollauf gewürdigt werden. So werden in der Einleitung die experimentellen Tatsachen eingehend beschrieben, auf denen die Theorie aufgebaut wird: das Gesetz der multiplen Proportionen, die Brownsche Bewegung, Zählung der α-Partikeln, Messung der Elementarladung, die Versuche von Laue und Bragg und weiter in der kinetischen Gastheorie z. B. die Versuche von Richardson und von O. Stern über die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen bzw. der Atome, die von Born und Bormann, von W. Wien über die freie Weglänge, der Ramsauereffekt.

In drei Kapiteln werden behandelt: die kinetische Gastheorie, die statistische Mechanik, die Grundlagen der Quantentheorie. Verfasser war bestrebt eine für Anfänger verwirrende Überfülle des Stoffes zu vermeiden; nur grundlegendes und wichtiges wird behandelt und zwar in anregender und klar verständlicher Weise.

Kinetische Gastheorie. Zuerst werden Druck und Temperatur nach Clausius gedeutet und die Zustandsgleichung abgeleitet. Die weitere Behandlung der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung, der Stosszahl, der freien Weglänge, des Transports von Impuls und Energie (Reibung und Wärmeleitung) lehnt sich an BOLTZMANN und JEANS an, wobei die grundlegende Bedeutung der Stosszahl und freien Weglänge klar hervortritt. Es ist ein trefflicher Gedanke, die Besprechung der Elektrizitätsleitung in Gasen hier einzufügen als Beispiel der Erscheinungen, die durch die Ladung der Korpuskeln bedingt sind.

Statistische Mechanik. Die statistische Mechanik wird mit Recht breiter behandelt, scheint es doch nach der neuesten Entwicklung, dass das statistische Element mit den Grundprinzipien der Physik enger gekoppelt ist, als man bisher annahm. Vor allem wird die Entropie nach BOLTZMANN und PLANCK als Zustandswahrscheinlichkeit gedeutet. Weiter wird aus den kanonischen Gleichungen der LIOUVILLEsche Satz bewiesen, sodann die kanonische Gesammtheit als Verallgemeinerung der MAXWELL—BOLTZMANNschen Verteilung eingeführt, indem an Stelle einzelner Molekeln ganze Systeme von vielen Molekeln treten. Nun erst wird die GIBBSsche Methode entwickelt, der Äquipartitionssatz abgeleitet, die verschiedenen Entropiedefinitionen verglichen, die VAN DER WAALSsche Zustandsgleichung aufgestellt. Einen breiten Raum nehmen die Schwankungseigenschaften ein. Daran schliesst die Theorie der BROWNschen Bewegung nach LANGEVIN, sowie die vollkommenere von ZEILINGER, wobei der EINSTEIN—FOKKERsche Satz benützt wird, dessen Beweis aber erst später gegeben wird (nach PLANCK).

Es folgt die Behandlung der Theorie des Magnetismus. Die Annahme von umlaufenden Elektronen führt zum BOHRschen Magneton. Ausführlich wird über die Versuche von EINSTEIN—DE HAAS, BARNETT, über den STERN—GERLACH-Effekt berichtet; die LANGEVINsche Theorie des Paramagnetismus bildet den Schluss.

Grundlinien der Quantentheorie. Bei Einführung der Grundbegriffe befolgt der Verfasser nicht den geschichtlichen Weg der Betrachtung der schwarzen Strahlung, sondern die klassischen Versuche von J. FRANCK und G. HERTZ über den unelastischen Stoss von Molekeln und Elektronen werden herangezogen. Nach Besprechung der RUTHERFORDschen Versuche über die Streuung der α Strahlen, wird das Wasserstoffmodell aufgestellt. Es folgen Anwendungen auf einige wichtige Fälle, wie die elastischen festen Körper, die schwarze Strahlung. Die festen Körper werden zuerst nach EINSTEIN, dann nach DEBYE behandelt, das akustische Spektrum wird jedoch nach der vom Verfasser stammenden viel einfacheren Methode berechnet; es folgt die zuerst vom Verfasser gegebene Ableitung der Zustandsgleichung von festen Körpern, in die die elastischen Spannungen und Deformationsgrössen und die Temperatur eingehen. Die Theorie der schwarzen Strahlung wird von mehreren Seiten beleuchtet. Der Unterschied der klassischen und der quantenhaften Auffassung wird durchgehend scharf hervorgehoben.

Der letzte Paragraph ist den Lichtquanten gewidmet; der DOPPLEReffekt und der COMPTONeffekt finden ihre einfache Deutung.

Der zweite Teil des Werkes soll die Theorie der Spektra und die Quantenmechanik von HEISENBERG und SCHRÖDINGER enthalten. Es ist lebhaft zu wünschen, dass der zweite Teil baldigst erscheine.

Karl Tangl.

H. Grassmann, Projektive Geometrie der Ebene. Unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt. Zweiter Band: Ternäres. Zweiter Teil, XI + 522 S., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1927.

Durch den vorliegenden zweiten Teil des zweiten Bandes wird das gross angelegte Werk zum Abschluss gebracht (der erste Band erschien 1909, der erste Teil des zweiten Bandes 1913). Wie G. Wolff in einem Nachworte berichtet, ist es der Unterstützung einer Reihe von Freunden und Förderern der Ausdehnungslehre zu verdanken, dass das im Nachlasse des 1922 verstorbenen Verfassers aufgefundene Manuskript des vorliegenden Teilbandes veröffentlicht werden konnte; es ist zu hoffen, dass diese pietätsvolle Handlung einmal noch zum Wiederaufblühen des Interesses für diese Art geometrischer Forschung beitragen wird.

Im vorliegenden Teilbande wird in der Hauptsache eine ausführliche Theorie der linearen Kegelschnittsysteme geboten, nebst einer eingehenden Darstellung der Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung und dritter Klasse, die sich dabei als notwendig erweist. Zum Schlusse folgen Anwendungen auf die aequiforme und auf die affine Geometrie, indem die allgemeinen Ergebnisse der projektiven Geometrie durch Auszeichnung der Kreispunkte und der unendlich fernen Geraden spezialisiert werden. Die Darstellung ist äusserst ausführlich, und dürfte jedem für die Geometrie interessierten Anfänger verständlich sein. Die Ausführlichkeit scheint aber öfters sowohl für den Kenner wie auch für den Anfänger viel zu weit zu gehen. Besondere und manchmal geradezu vervirrende Weitläufigkeiten rühren von der Behandlung und Anordnung dualer Sätze her, die öfters durch mehrere Seiten örtlich voneinander getrennt und jeder für sich unter Wiederholung aller Einzelheiten bewiesen werden; stellenweise wird der Anfänger fast den Eindruck gewinnen müssen, dass dies durch die Natur der Punktrechnung bedingt ist. Auf alle Fälle aber wird ein eifriger Leser durch die Fülle der schönen geometrischen Tatsachen, die er im Buche kennen lernt, reichlich für seine Mühe entlohnt sein. Auch ist es für jedermann förderlich, wenn er sich eine originelle symbolische Rechnungsart, wie die Punktrechnung, aneignet; für junge Leser dürfte die projektive Geometrie in synthetisch-symbolischer Behandlungsweise eine ausgezeichnete Vorschule zum abstrakten axiomatischen Denken bilden.

Tibor Radó.

F. Enriques, Zur Geschichte der Logik (Wissenschaft und Hypothese XXVI), deutsch von L. Bieberbach, VI + 240 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1927.

Der Verfasser führt den Leser durch die Geschichte der Mathematik und Philosophie, um die Wechselwirkung der Logik und Mathematik von den alten Griechen bis zum Ende des neunzehnten Jahrhundert darzustellen. Die moderne Grundlagenkritik und Grundlagenforschung der Mathematik (Intuitionismus, Hilbertsche Schule), — obwohl dieselben eine so enge Beziehung zwischen den Fragen der Logik und Mathematik zutage brachten, als keine ältere Forschungen, — werden im vorliegenden Buche gar nicht behandelt;

wahrscheinlich aus dem Grunde, weil diese Bestrebungen heutzutage noch nicht mit derjenigen geschichtlichen Objektivität betrachtet und bewertet werden können, welche sonst im ganzen Buche die höchste Norm des Verfassers gewesen zu sein scheint. Mit einiger Aufmerksamkeit kann man übrigens auch weniger moderne, wichtige logisch-mathematische Bestrebungen finden, die im Buche ebenfalls nicht erwähnt wurden; der Verfasser hat aber offenbar nicht nach historischer Vollständigkeit gestrebt, er wollte eben nur *die charakteristischesten Züge darstellen.*

Der eigentliche Fachmann, den die Entwicklung der logischen Fragen der Mathematik, oder die Entwicklung der der Mathematik nahestehenden Fragen der Logik interessiert, wird das Buch ebenso mit Vergnügen lesen, wie auch jeder Leser, der dieses wichtige Gebiet der Kulturgeschichte, dessen Bedeutung noch immer nicht genügend gewertet wird, kennen lernen will.

Die vorzügliche Übersetzung rührt von Herrn L. Bieberbach her.

L. Kalmár.

H. Behmann, Mathematik und Logik (Math.-Phys. Bibliothek Bd. 71), 60 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1927.

In unseren Zeiten, als die neueren Ergebnisse der Grundlagenforschung der Mathematik die Fragen der symbolischen Logik in den Vordergrund rücken, ist eine knappe, auch für den Anfänger leicht fassbare Darstellung dieser Disziplin, wie eine solche im vorliegenden Bändchen geboten wird, sehr willkommen. Man kann aus diesem Büchlein nicht nur den elementaren Aussagenkalkül, sondern auch die wichtigsten Ergebnisse der Begriffslogik (d. h. des logischen Funktionenkalküls), sowie der auf dieser gegründeten Klassen- und Zuordnungslogik kennen lernen und zum Schlusse erfahren, wie der Anzahlbegriff und dessen Arithmetik in der Sprache der symbolischen Logik darzustellen sind.

Das kleine Buch ist warm zu empfehlen einem jeden, der eine Orientierung über das Gebäude der symbolischen Logik erlangen will; aber auch dem, der sich tiefer mit den Problemen dieser Disziplin beschäftigen will, wird es als sehr gute Vorschule dienen; besonders ist es als Vorbereitung zum Studium der Whitehead—Russellschen *Principia Mathematica* geeignet.

Es möge einiges noch über das verwendete Bezeichnungssystem bemerkt werden. Es ist leider üblich, dass, mit einer gewissen Übertreibung gesagt, ein jeder Verfasser in einer jeden Arbeit eine besondere Symbolik benützt, was man allerdings dadurch entschuldigen kann, dass für die Behandlung verschiedener Fragen tatsächlich besondere Symbolsysteme zweckmässig sein können. Die im vorliegenden Bändchen verwendete Symbolik ist sehr bequem, um mit derselben zu rechnen, aber sie erweist sich bei der inhaltlichen Deutung komplizierter Formeln, was als Anwendung der Symbolik für die Anfänger doch in erster Linie in Betracht kommt, vielfach zu unübersichtlich, und zwar wegen der mehrfachen *Überdetermination* der einzelnen Zeichen. (Z. B. bedeutet die Überstreichung die Negation, oder einen partikulären Operator, oder die Beziehung der Verschiedenheit, je nachdem eine Aussagenvariable, eine Dingvariable, oder zwei Dingvariabeln überstrichen wurden.) Es erscheint wünschenswert, dass in der voraussichtlich bald nötig werdenden Neuauflage der Verfasser sich etwa an die Symbolik der *Principia Mathematica* anschliesst, obwohl dann die vom Verfasser mit Recht als sehr förderlich empfohlene Übung wegfallen würde, die Formeln der *Principia Mathematica* mit Hilfe der im vorliegenden Büchlein zugrunde gelegten Symbolik darzustellen.

L. Kalmár.

E. Fettweis, Das Rechnen der Naturvölker, IV+96 S., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1927.

„Vorliegende Arbeit will eine Darstellung und Analyse des Rechnens der Naturvölker geben, um dadurch einerseits der Entscheidung gewisser strittiger Fragen der psychologisch begründeten Rechenmethodik zu dienen, andererseits einer Korrektur gewisser Urteile über die Rechenkunst und im Anschluss daran über die geistige Veranlagung der Naturvölker." (Aus dem Vorwort.)

Auch der Mathematiker, den die eigentlichen Problemstellungen des Verfassers weniger interessieren dürften, findet im anziehend geschriebenen Büchlein eine Menge interessanter Einzelheiten über die primitivsten Formen einiger grundlegender Begriffsbildungen seiner Wissenschaft.

Tibor Radó.

H. v. Sanden, Mathematisches Praktikum I (Teubners technische Leitfäden, Bd. 27), IV+122 S., sowie 20 Zahlentafeln als Anhang, Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1927.

Das Bändchen enthält den ersten Teil einer, für technische Hochschulen bestimmten, Aufgabensammlung zur Differential- u. Integralrechnung. Nach zwei einleitenden Abschnitten über Irrationalzahlen und Funktionen, sowie über die praktischen Prinzipien der Zahlenrechnungen und über den Gebrauch des Rechenschiebers werden die Aufgaben in fünf Abschnitte gruppiert (Der Satz von TAYLOR. — Auflösung von Gleichungen. — Ausgleichungsrechnung. — Integration, Differentiation, Interpolation. — Harmonische Analyse). Einem jeden Abschnitte geht eine knappe, aber stets verständliche Zusammenstellung der nötigen theoretischen Hilfsmittel voran; sonst wird natürlich die Kenntnis der Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung vorausgesetzt.

Die dargebotenen Aufgaben sind geistreich und lehrreich, und stehen mit Problemen in Verbindung, die den Leser interessieren müssen. Die zahlreichen Stichproben, die Referent unternahm, liessen eben nur eine einzige Aufgabe der Sammlung als kritisierbar erscheinen; da dieselbe mit einer prinzipiellen Frage in Verbindung steht, so möge sie kurz besprochen werden. Es handelt sich um die Aufgabe (S. 24, unten):

Ein Grundstück wurde verkauft und seine Grösse durch Planimetrieren auf der Landkarte ermittelt. Der Verkäufer machte darauf aufmerksam, dass es auf einem 1 : 7 geneigten Abhang läge und seine tatsächliche Fläche infolgedessen g r ö s s e r *sei, als die planimetrierte Horizontalprojektion. Der Mann hat recht. Ist sein Einwand von praktischer Bedeutung?*

Zur Lösung wird *die tatsächliche Fläche* mit F, die Horizontalprojektion mit F' bezeichnet und es wird ausgerechnet, dass F um etwa 1% grösser als F' sei. Aus dieser Überlegung könnte aber der Leser auch den Schluss ziehen, dass etwa bei einem mitten in einer Grosstadt auf einem sehr steilen Abhange gelegenen Grundstück *die tatsächliche Fläche* von praktischer Bedeutung sein kann. Wäre dies der Fall, so hätten sich naturgemäss bereits praktische Methoden ausgebildet, um *die tatsächliche Fläche* eines Grundstückes mit grosser Genauigkeit auszumessen. Nun hat Referent, von dieser Annahme ausgehend, vor etwa anderthalb Jahren umfangreiche Interwiews in sachverständigen Kreisen angestellt in der Hoffnung, die solchen praktischen Messungsmethoden zugrunde liegenden Ideen für die Theorie der Quadratur krummer Flächen verwerten zu können. Das Ergebnis war indessen durchaus negativ; die befragten Herren beriefen sich einstimmig darauf, dass die Pflanzen in vertikaler Richtung wachsen und dass die Wände der Häuser in vertikaler Richtung aufgeführt werden (*und nicht etwa in der Richtung der Flächennormalen*) — und dass demzufolge es praktisch immer nur auf die Fläche der Horizontalprojektion ankommt. Danach wäre also die rechnerische Lösung der obigen Aufgabe irreführend, da ja die Bedeutungslosigkeit der tatsächlichen Fläche des Grundstückes ohne jede Rechnung einzusehen ist, unabhängig davon, ob dieselbe um 1% oder etwa um 101% grösser als die Horizontalprojektion ist.

Sonst haben die übrigen Aufgaben, wie oben hervorgehoben wurde, den bestmöglichen Eindruck auf Referenten gemacht. Diese Aufgaben sind nicht blosse Rechenexempeln (obwohl Verfasser mit Recht das grösste Gewicht auf die effektive Durchführung aller Rechnungen legt), sie sind auch vorzüglich geeignet, den Leser in der so überaus wichtigen Kunst des Abschätzens auszubilden.

Tibor Radó.

R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, erster Band, XIV + 410 S., Berlin, J. Springer, 1927.

Ein ausgezeichnetes Lehrbuch für angehende Mathematiker, Physiker, Chemiker und Ingenieure, reich an Wendungen und Anwendungen. Es weicht in mancher Hinsicht von der landläufigen Literatur ab. Erstens dadurch, dass dem prinzipiell wichtigen das formale Rechenapparat und die Beispiele vorangeschickt werden, was der Verfasser durch didaktische Gründe eingehend motiviert. Zweitens ist es der Bruch mit der überlebten Tradition, Differentialrechnung und Integralrechnung voneinander zu trennen, der unter Hinweis auf den mündlichen Vorlesungsbetrieb von F. Klein und andern hier auch in einem Lehrbuche für Anfänger vollzogen wird. Für fortgeschrittene Leser hat dies ja schon Camille Jordan in seinem berühmten Cours d'Analyse (Bd. 1., 2. Aufl., 1893) getan, wo in der Vorrede folgendes steht: „Bien que le présent Volume ait pour objet principal le Calcul différentiel, nous avons, suivant l'exemple d'autres Auteurs, placé dès le début la définition et les propriétés fondamentales des intégrales définies, simples ou multiples, lorsqu'on peut les considérer comme limites de sommes. De cette façon, les notions fondamentales du Calcul infinitésimal se trouvent à peu près toutes réunies dans les trois premiers Chapitres de ce Volume.“

Das Buch ist musterhaft ausgestattet.

Wir sehen mit grosser Erwartung dem zweiten Bande entgegen.

F. R.

A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (Grundlehren der math. Wissenschaften V), 2. Auflage, IX + 251 S., Berlin, J. Springer, 1927.

Die Neuaflage des vorzüglichen Werkes von Speiser fängt mit zwei einleitenden Aufsätzen über die Vorgeschichte der Gruppentheorie und über die Ableitung des Gruppenbegriffes aus den Permutationen an. Es sind drei Zugänge zum Studium des reichen und interessanten Inhaltes gewährt. Das erste Kapitel führt die Grundlagen der abstrakten Gruppentheorie in einer klaren und vollständigen Behandlung ein. Kapitel 6 und 7 erbringen die geometrische Einführung in die Theorie der diskreten Gruppen, an Hand der Flächenornamente und der Kristallklassen, in einer durchaus interessanten und lebhaften Darstellung. Im achten Kapitel wird vom kombinatorischen Standpunkt ausgegangen und die Theorie der Permutationen als Mittel zur Einführung in die allgemeine Gruppentheorie in den Vordergrund gestellt. — Abgesehen von den Kapiteln 6 und 7, welche sich vom Reste des Inhaltes abtrennen, findet man in den ersten zehn Kapiteln eine zusammenhängende und vorzügliche Darstellung der allgemeinen Theorie der endlichen Gruppen. In den weiteren 6 Kapiteln werden das grundlegende Problem der Darstellung der Gruppen durch Substitutionen, die Gruppencharaktere, arithmetische Sätze über Substitutionen und die Anwendung der Gruppentheorie auf algebraische Gleichungen behandelt. — Die Darstellung orientiert sich in der Richtung der Zahlentheorie, entsprechend der Natur der Sache; nach Worten des Schlussparagraphen, welcher auf die zahlentheoretische Bedeutung der erbrachten Resultate hinweist, mündet die Gruppentheorie in die allgemeine Zahlentheorie, indem sie ihr wertvolle neue Erkenntnisse zuführt.

Die Darstellung des behandelten Stoffes ist überall sehr anregend; Beispiele zur Erläuterung werden reichlich und in sehr gelungener Weise angebracht, was das Studium des Buches wesentlich erleichtert. Das äusserst wertvolle Werk von Speiser wird sicher viel dazu beitragen, die Gruppentheorie weiteren Kreisen zugänglich und bekannt zu machen.

B. v. Kerékjártó.

F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil II., für den Druck bearbeitet von R. Courant und St Cohn-Vossen (Grundlehren der math. Wissenschaften XXV), XIII + 208 S., Berlin, J. Springer, 1927.

„Geplant war ein systematisches Vordringen von den ersten invariantentheoretischen Ansätzen in der Geometrie bis zur Einsteinschen Gravitationstheorie.“ (Aus dem Vorwort.) Der Sinn und die Tendenz für die historischen

Gesichtspunkte in der Mathematik, die KLEIN in allen seinen Werken hervorkehrt, dominiert naturgemäss in der vorliegenden Vorlesung. Es scheint offenbar eines seiner Ziele gewesen zu sein, aus der Vergessenheit manches hervorzuholen, was — teils bewusst, teils unbewusst — beim Aufbau der EINSTEINschen Gravitationstheorie und der damit zusammenhängenden Theorien mitwirkte.

Die lineare Invariantentheorie und die Relativitätstheorie der LORENTZgruppe bilden den Gegenstand der ersten beiden Kapiteln. Jeder Fachmann wird mit aufrichtiger Bewunderung die Behandlung dieser in der neueren Literatur vielfach bearbeiteten Disziplinen studieren. Die eigentümliche Originalität KLEINS, sein vielseitiges Interesse erscheint hier in seiner faszinierenden Wirkung. Die Einordnung der Vektoranalysis und der Quaternionentheorie in beiden Kapiteln — entsprechend den Zielen des Verfassers — verleiht einen besonderen Reiz diesen Entwicklungen. Dass III. Kapitel — mit der GAUSSschen inneren Theorie der Flächen beginnend — ist den RIEMANNschen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten gewidmet. Die Entwicklung dieser Theorie, die man — über RIEMANN hinaus — CHRISTOFFEL und LIPSCHITZ verdankt, wird häufig ausser Acht gelassen; diese gelangt zu Ehre in der vorliegenden Darstellung. Deshalb wird jeder Fachgenosse mit grossem Interesse dieses Buch lesen, obwohl verschiedene neuere Untersuchungen dieses Gedankenkreises darin nicht aufgenommen werden konnten.

A. H.

Über Faktorenfolgen für Fouriersche Reihen.

Von S. BOCHNER in München.

1. Von verschiedenen Autoren und zuletzt von Herrn M. FEKETE in einer zusammenfassenden Arbeit[1]) ist für mehrere „Klassen" (vgl. **5.**) von periodischen Funktionen (mit der gemeinsamen Periode 2π) die folgende Frage beantwortet worden. Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zahlenfolge

(1) $$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots,$$

damit jede FOURIERreihe

(2) $$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

einer Funktion einer bestimmten Klasse durch „Multiplikation" mit den Faktoren (1) in eine FOURIERreihe

(3) $$\mu_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

einer Funktion derselben Klasse übergeht. Die Antwort lautet, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{n} \sin nx$$

die FOURIERreihe einer Funktion von beschränkter Variation sein muss. Diesem Satz über „Faktoren der Klasseninvarianz" entspricht ein Parallelsatz über „Faktoren der Klassenkovarianz" (vgl. **7.**).

2. Man kann nun aber, wie schon vielfach geschehen ist, den Begriff der Faktorenfolge weiter fassen, nämlich als Zahlen

(4) $$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \text{ und } \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots,$$

---

1) M. FEKETE, Über Faktorenfolgen, welche die „Klasse" einer FOURIERschen Reihe unverändert lassen, *diese Acta*, Bd. 1 (1923), S. 148—166.; wir werden diese Arbeit im folgenden mit F. zitieren.

von der Art, dass jede aus einer FOURIERreihe (2) hervorgegangene Reihe

$$(5) \qquad \gamma_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n a_n \cos nx + \delta_n b_n \sin nx)$$

wiederum die FOURIERreihe einer Funktion derselben Klasse ist. Vom Standpunkt der Funktionalanalysis[2]) erscheint der Begriff der Faktorenfolge in dieser Allgemeinheit naturgemässer als der in F. zugrundegelegte Spezielfall $\gamma_n = \delta_n$. Es dürfte daher die Bemerkung am Platze sein, dass man für dieselben Klassen und mit analogem Ergebnis wie in F., das allgemeinere Problem lösen kann (vgl. **7.**), wie die Zahlen (4) beschaffen sein müssen, damit sie eine Faktorenfolge bilden.

3. Eine weitergehende Verallgemeinerung werden wir dadurch erhalten, dass wir die Funktionen allgemein *komplexwertig* annehmen, $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, ihre FOURIERreihen in der Gestalt

$$(6) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{inx}$$

schreiben, und unter einer Faktorenfolge irgendwelche *komplexe* Zahlen

$$\lambda_n (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

verstehen werden, so dass die aus der FOURIERreihe (6) hervorgegangene Reihe

$$(7) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n A_n e^{inx}$$

wiederum eine FOURIERreihe ist. (Zur formalen Vereinfachung machen wir die unwesentliche Annahme, dass für alle von uns betrachteten Funktionen das konstante Glied der FOURIERreihe verschwindet.) Durch diese Erweiterung ins Komplexe werden insbesondere die zwei, in F. getrennten, Sätze über Faktoren für Klasseninvarianz und für Klassenkovarianz zu einem gemeinsamen Satz vereinheitlicht (vgl. **7.**).

---

[2]) Man kann die durch feste Zahlen (4) hervorgerufene Zuordnung zwischen den Funktionen (2) und (5) als eine Funktionaloperation auffassen, und die Frage stellen, welcher Art Funktionaloperationen sich umgekehrt durch Faktorenfolgen erzeugen lassen. Vgl. des Verfassers: Ein Satz über lineare Operationen, *Math. Zeitschrift*, Bd. 29 (1929), S. 737—743., wo es sich allerdings um FOURIERintegrale und nicht um FOURIERreihen handelt.

4. Unser Satz lautet folgendermassen:

Satz. *Damit für eine der in* **5.** *und* **6.** *erörterten Funktionenklassen die aus einer* FOURIER*reihe* (6) *hervorgegangene Reihe* (7) *wiederum eine* FOURIER*reihe ist, ist notwendig und hinreichend, dass die mit den Faktoren* λ_n *gebildete Reihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{n} e^{-inx} \tag{8}$$

die FOURIER*reihe einer Funktion von beschränkter Variation ist.*

5. Die von uns betrachteten Funktionen $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ sollen jedenfalls nach LEBESGUE integrierbar sein. Wir nennen eine Funktion kurzerhand beschränkt, wenn es eine zu ihr im LEBESGUEschen Sinne äquivalente Funktion gibt welche im üblichen Sinne beschränkt ist. Wir betrachten, wie in F.: 1) die Klasse *(B)* aller beschränkten Funktionen, 2) die Klasse *(BR)* aller Funktionen, welche beschränkt und nach RIEMANN integrierbar sind, 3) die Klasse *(S)* aller (durchweg) stetigen Funktionen, 4) die Klasse *(V)* aller Funktionen von beschränkter Variation.

Unter dem n-ten FEJÉRpolynom $f_n(x)$ der Funktion $f(x)$ verstehen wir, wie üblich, das mit Fouriertermen von $f(x)$ gebildete trigonometrische Polynom

$$f_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} \left(1 - \frac{|\nu|}{n}\right) A_\nu e^{i\nu x}.$$

Die FEJÉRpolynome einer Funktion $f(x)$ aus einer unserer vier Klassen sind in bezug auf die Klasseneigenschaft gleichartig, also: gleichartig beschränkt, gleichartig stetig, gleichartig nach RIEMANN integrierbar, von gleichartig beschränkter Variation; und umgekehrt, falls die Gesamtheit der FEJÉRpolynome einer Funktion $f(x)$ eine dieser Klasseneigenschaften gleichartig besitzt, so gibt es eine zu $f(x)$ äquivalente Funktion, welche zur betreffenden Klasse gehört.[8])

Mit der Faktorenfolge λ_n bilden wir formal die Reihe (8) und deren FEJÉRpolynome

$$\Lambda_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} \left(1 - \frac{|\nu|}{n}\right) \frac{\lambda_\nu}{\nu} e^{-i\nu x}.$$

[8]) Dass wir es jetzt mit komplexwertigen Funktionen zu tun haben, ändert nur sehr wenig an den in F. gegebenen Definitionen und Beweisen.

Die mit irgendeiner Funktion $f(x)$ gebildeten Polynome

$$\Lambda f_n(x) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\Lambda_n'(t)\,dt$$

sind die Fejérpolynome der (vorderhand nur formal gedachten) Reihe

(9) $$\Lambda f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n A_n e^{inx}.$$

Wir können daher, wie in F., folgendermassen schliessen. Gibt es eine Funktion von beschränkter Variation, deren Fourierreihe mit (8) übereinstimmt, so sind die Integrale

(10) $$\int_0^{2\pi} |\Lambda_n'(t)|\,dt$$

beschränkt, eine jede Klasseneigenschaft von $f(x)$ überträgt sich demnach gleichartig auf die Funktionen $\Lambda f_n(x)$, also gibt es eine Funktion derselben Klasse wie $f(x)$, deren Fourierreihe mit (9) übereinstimmt; und wenn umgekehrt für eine Funktion $f(x)$ die Polynome $\Lambda f_n(x)$ gleichartig beschränkt sind, so muss auf Grund desselben Haarschen Hilfssatzes wie in F. die Folge (10) beschränkt, also (8) die Fourierreihe einer Funktion von beschränkter Variation sein. Also besteht unser Satz für die Klassen *(B)*, *(BR)*, *(S)* und *(V)*.

6. Abweichend von F. kann man auch die Klasse *(DL)* aller Funktionen, welche nach Lebesgue differenzierbar sind, ganz ebenso wie die bisherigen Klassen behandeln. Damit nämlich $f(x)$ zu *(DL)* gehört, ist notwendig und hinreichend, dass es eine Funktion $\varepsilon(\delta) > 0$, mit $\lim\limits_{\delta\to 0} \varepsilon(\delta) = 0$, gibt, so dass für irgendwelche reelle Zahlen $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots < \alpha_k < \beta_k$, $\beta_k - \alpha_1 \leqq 2\pi$, aus

$$\sum_{\nu=1}^{k} (\beta_\nu - \alpha_\nu) \leqq \delta$$

folgt

$$\sum_{\nu=1}^{k} |f(\beta_\nu) - f(\alpha_\nu)| \leqq \varepsilon.$$

Bleibt noch die Klasse *(L)* aller nach Lebesgue integrierbaren Funktionen. Der in F. angewandte Satz von H. Steinhaus lässt sich, worauf wir nicht im einzelnen eingehen, Schritt für Schritt ins Komplexe erweitern, so dass unser Satz auch für die Funktionenklasse *(L)* Gültigkeit hat.

7. Nehmen wir die Spezialisierung vor

$$A_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$$

$$A_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2}$$

$$\lambda_{-n} = \lambda_n = \mu_n, \tag{11}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, wo a_n, b_n, μ_n reelle Zahlen sind, so ergibt unser Satz den in 1. angeführten Satz aus F. Setzen wir statt (11)

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n = -i\nu_n$$

so erhalten wir den Satz aus F. über Faktoren der Klassenkovarianz, dass nämlich die aus der Fourierreihe (2) hervorgegangene Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu_n (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

dann und nur dann die Fourierreihe einer Funktion derselben Klasse ist, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n \cos nx}{n}$$

die Fourierreihe einer Funktion von beschränkter Variation ist. Hierbei haben wir, über F. hinausgehend, letzteren Satz auch für die Funktionenklasse *(L)* gewonnen.[4])

(Eingegangen am 14. Oktober 1928.)

[4]) Diese Ausdehnung des Satzes von Fekete auf die Funktionenklasse (*L*) ist bereits von A. Zygmund, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres*, (1927), S. 343—347., bewiesen worden.

Sur des polynomes analogues aux polynomes de Bernoulli et sur des formules de sommation analogues à celle de MacLaurin-Euler.

Par CHARLES JORDAN à Budapest.

§ 1. Nous allons définir le polynome de BERNOULLI de seconde espèce $\psi_n(x)$ de degré n, à une constante additive près par sa dérivée:

$$D\psi_n(x) = \binom{x}{n-1}. \tag{1}$$

Développons le polynome en série suivant les coefficients du binome

$$\psi_n(x) = b_0\binom{x}{n} + b_1\binom{x}{n-1} + \ldots + b_n\binom{x}{0}. \tag{2}$$

En prenant la différence finie des deux membres de (1), on trouve

$$\Delta D\psi_n(x) = \binom{x}{n-2} = D\psi_{n-1}(x)\ ^{1)}$$

Intégrons et disposons de la constante additive de $\psi_{n-1}(x)$ pour avoir

$$\Delta\psi_n(x) = \psi_{n-1}(x). \tag{3}$$

Les relations (1) et (3) déterminent complétement la suite des polynomes $\psi_n(x)$.[2]) L'opération des différences finies exécutée

[1]) Le symbole $\Delta f(x)$ signifiant $f(x+1) - f(x)$, et le symbole $\binom{z}{\lambda}$ le coefficient généralisé du binome

$$\binom{z}{\lambda} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(z-\lambda+1)}.$$

[2]) Cette définition est analogue à celle des polynomes de BERNOULLI de première espèce (*Voir* CH. JORDAN, *Statistique Mathématique*, Paris, 1927, p. 16.)

$$\Delta\varphi_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{et} \quad D\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x).$$

sur les deux membres de l'équation (2) donne

$$\psi_{n-1}(x)=b_0\binom{x}{n-1}+b_1\binom{x}{n-2}+\ldots+b_{n-1}$$

on en conclut que les nombres b_i sont indépendants de n; la suite $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots$ fournit tous les polynomes ψ_n.

Entrons maintenant dans les détails. De (1) il suit

$$D\psi_1(x)=1$$

donc $\psi_1(x)=x+b_1$, par suite $b_0=1$. Si $n>1$, posons dans (1) $x=0$, alors comme d'une part $\binom{x}{n-1}=0$ si $x=0$ et $n>1$, et d'autre part

$$\left[D\binom{x}{s}\right]_{x=0}=\frac{(-1)^{s-1}}{s},$$

on conclut

$$\frac{1}{n}-\frac{b_1}{n-1}+\frac{b_2}{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}b_{n-1}=0. \tag{4}$$

En posant dans cette équation successivement $n=2, 3, 4, \ldots$, on peut déterminer les nombres $b_1, b_2, b_3, \ldots$

On peut les obtenir d'une autre manière; en remarquant qu'à la suite de (1) on a

$$\int_0^1\binom{x}{n}dx=\psi_{n+1}(1)-\psi_{n+1}(0)=b_n.$$

Si $n>0$, le signe de la quantité à intégrer est dans tout l'intervalle égal à celui de $(-1)^{n-1}$; on en conclut que $b_{2n}<0$ et $b_{2n+1}>0$.

De plus, on peut écrire b_{n+1} la manière suivante:

$$b_{n+1}=\int_0^1\binom{x}{n}\frac{x-n}{n+1}dx.$$

Comme $x-n$ ne change pas de signe de zéro à un, on a $b_{n+1}=\dfrac{\xi-n}{n+1}b_n$ où $0<\xi<1$; il en résulte

$$\frac{n-1}{n+1}|b_n|<|b_{n+1}|<\frac{n}{n+1}|b_n|.$$

Développons $\binom{x}{n}$ suivant les puissances de x; on a

$$(5)\qquad \binom{x}{n} = \frac{1}{n!}\left[S_n^1 x + S_n^2 x^2 + \ldots + S_n^n x^n\right]$$

où les nombres S_n^i sont les nombres de Stirling de première espèce, définis par l'équation

$$S_n^i = \frac{1}{i!}\left[D^i x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)\right]_{x=0}.$$

En intégrant (5) de zéro à un, on trouve

$$(6)\qquad b_n = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i+1}S_n^i.$$ [3]

A l'aide de cette équation on peut, lorsqu'on dispose d'une table de nombres de Stirling, calculer plus rapidement les nombres b_i que par l'équation (4). On trouve

$b_0 = 1$	$b_4 = -19/720$	$b_8 = -33953/3628800$
$b_1 = 1/2$	$b_5 = 3/160$	$b_9 = 57281/7257600$
$b_2 = -1/12$	$b_6 = -863/60480$	$b_{10} = -3250433/479001600$
$b_3 = 1/24$	$b_7 = 275/24192$	...

ou encore à 10 décimales,

$b_0 = 1$	$b_6 = -0{,}01426\ 91799$
$b_1 = 0{,}5$	$b_7 = 0{,}01136\ 73942$
$b_2 = -0{,}08333\ 33333$	$b_8 = -0{,}00935\ 65366$
$b_3 = 0{,}04166\ 66667$	$b_9 = 0{,}00789\ 25540$
$b_4 = -0{,}02638\ 88889$	$b_{10} = -0{,}00678\ 58500$
$b_5 = 0{,}01875$	$b_{11} = 0{,}00592\ 40563.$

Les polynomes de Bernoulli de seconde espèce seront donc:

$$\psi_1(x) = \binom{x}{1} + \frac{1}{2}$$

$$\psi_2(x) = \binom{x}{2} + \frac{1}{2}\binom{x}{1} - \frac{1}{12}$$

$$\psi_3(x) = \binom{x}{3} + \frac{1}{2}\binom{x}{2} - \frac{1}{12}\binom{x}{1} + \frac{1}{24}$$

. . .

[3] Dans le présent travail, conformément aux principes du Calcul des Différences Finies, nous écrivons la somme définie

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(a+m-1) = \sum_{i=a}^{a+m} f(i).$$

Dans ce cas si $F(x)$ est la somme indéfinie de $f(x)$, c.-à-d. si $\Delta F(x) = f(x)$, la somme définie précédente est aussi égale à $F(a+m) - F(a)$, c.-à-d. à la différence des valeurs de la somme indéfinie aux limites.

Valeurs particulières :

$$\psi_n(0) = b_n, \quad D\psi_1(0) = 1, \quad D\psi_n(0) = 0 \quad (\text{si } n > 1)$$
$$\psi_n(1) = b_{n-1} + b_n$$
$$\psi_n(-1) = b_n - b_{n-1} + b_{n-2} - \ldots + (-1)^n b_0.$$

§ **2.** Intégration approchée des fonctions à l'aide des polynomes de Bernoulli de seconde espèce, en partant de la formule de Newton.

Généralement on donne $n+1$ points correspondant à $x = 0, 1, 2, \ldots n$, alors on peut déterminer $f(0)$, $\Delta f(0), \ldots \Delta^n f(0)$. La parabole de degré n passant par ces points est donnée par la formule de Newton

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} \Delta f(0) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(0) + \ldots + \binom{x}{n} \Delta^n f(0)$$

et l'intégration donne l'aire correspondent à la parabole entre a et b

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(0)\,[\psi_1(b) - \psi_1(a)] + \Delta f(0)\,[\psi_2(b) - \psi_2(a)] + \ldots + \Delta^n f(0)\,[\psi_{n+1}(b) - \psi_{n+1}(a)]. \tag{1}$$

Le plus souvent cette intégrale est demandée entre deux des points donnés. Comme $n+1$ dépasse rarement 10, il est facile de faire des tables de la fonction $\psi_\nu(x)$ pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots, 10$ et pour $x = 0, 1, 2, \ldots, 9$. La Table I. fournit alors très rapidement l'intégrale (1).

Exemple 1. Soit $f(0) = 4$, $f(1) = 3$, $f(2) = 1$ ét $f(3) = 0$. De là on tire $\Delta f(0) = -1$, $\Delta^2 f(0) = -1$ et $\Delta^3 f(0) = 2$; on a donc

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 4\,[\psi_1(3) - \psi_1(0)] - [\psi_2(3) - \psi_2(0)] - [\psi_3(3) - \psi_3(0)] + 2\,[\psi_4(3) - \psi_4(0)] = 6.$$

Autre méthode. On donne comme avant les $n+1$ points; le polynome de Newton peut s'écrire:

$$f(i+x) = f(i) + \binom{x}{1} \Delta f(i) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(i) + \ldots + \binom{x}{n} \Delta^n f(i),$$

on en tire

$$\int_0^1 f(i+x)\,dx = f(i) + b_1 \Delta f(i) + b_2 \Delta^2 f(i) + \ldots + b_n \Delta^n f(i).$$

En sommant, lorsque i prend les valeurs de a à $a+m-1$, on obtient une formule analogue à la formule de sommation de

Maclaurin—Euler, pour des polynomes. Nous allons déduire sa forme générale plus tard.

$$\int_a^{a+m} f(x)dx = \sum_{i=a}^{a+m} f(i) + b_1[f(a+m)-f(a)] + \tag{2}$$

$$+ b_2[\Delta f(a+m) - \Delta f(a)] + \ldots + b_n[\Delta^{n-1} f(a+m) - \Delta^{n-1} f(a)].^{4)}$$

Lorsque l'on connaît les différences de $f(x)$ pour $x=0$, on déterminera ces différences pour une valeur quelconque de x par la formule connue

$$\Delta^s f(x) = \Delta^s f(0) + \binom{x}{1} \Delta^{s+1} f(0) + \binom{x}{2} \Delta^{s+2} f(0) + \ldots +$$

$$+ \binom{x}{n-s} \Delta^n f(0).$$

Dans le cas de l'Exemple 1. on a $a=0$, $m=3$; il en résulte $\Delta f(3)=2$, $\Delta^2 f(3)=3$, $\Delta^3 f(3)=2$, et de la formule (2),

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{3} f(i) + b_1[f(3)-f(0)] + b_2[\Delta f(3) - \Delta f(0)] +$$

$$+ b_3[\Delta^2 f(3) - \Delta^2 f(0)] = 6.$$

§ 3. Intégration des fonction à l'aide de la série d'Everett. On donne $2n+2$ points correspondant à $x=-n$, $-(n-1)$, …, $-1, 0, 1, \ldots (n+1)$; la parabole de degré $2n+1$ passant par ces points est d'après la formule d'Everett:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{x+\nu}{2\nu+1} \delta^{2\nu} f(1) - \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{x+\nu-1}{2\nu+1} \delta^{2\nu} f(0)^{5)}$$

En intégrant de a à b on trouve

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n+1} [\psi_{2\nu+2}(b+\nu) - \psi_{2\nu+2}(a+\nu)]\, \delta^{2\nu} f(1) -$$

$$- \sum_{\nu=0}^{n+1} [\psi_{2\nu+2}(b+\nu-1) - \psi_{2\nu+2}(a+\nu-1)]\, \delta^{2\nu} f(0). \tag{1}$$

En général l'intégration se fait entre deux des points donnés; alors la Table II. facilite les calculs.

---

[4]) Une formule analogue a été indiquée par Boole dans une des exemples de son *Treatise on the Calculus of finite Differences*, 1860, p. 243.

[5]) δ est le symbole des différences centrales:

$$\delta^2 f(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1).$$

Exemple 2. Soient $2n+2=4$, $a=-1$, $b=2$, $f(-1)=4$, $f(0)=3$, $f(1)=1$ et $f(2)=0$, donc $\delta^2 f(1)=1$ et $\delta^2 f(0)=-1$; la formule (1) donne

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = f(1)\,[\psi_2(2)-\psi_2(-1)] - f(0)\,[\psi_2(1)-\psi_2(-2)] +$$
$$+\delta^2 f(1)\,[\psi_4(3)-\psi_4(0)] - \delta^2 f(0)\,[\psi_4(2)-\psi_4(-1)] = 6.$$

Autre méthode. Le dévéloppement d'une fonction $f(x+i)$ en série d'EVERETT est la suivante:

$$(2)\quad f(x+i) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{x+\nu}{2\nu+1}\delta^{2\nu} f(i+1) - \sum_{\nu=0}^{n}\binom{x+\nu-1}{2\nu+1}\delta^{2\nu} f(i) + R_{2n}$$

où

$$R_{2n} = \binom{x+n-1}{2n} D^{2n} f(i+\xi)$$

et ξ est une fonction de x telle que $-n+1<\xi<n$, $0<\xi<x$.

Intégrons de 0 à 1 les deux membres de l'équation (2), on trouve

$$\int_0^1 f(x+i)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n} [\psi_{2\nu+2}(\nu+1) - \psi_{2\nu+2}(\nu)]\,\delta^{2\nu} f(i+1) -$$
$$-\sum_{\nu=0}^{n} [\psi_{2\nu+2}(\nu) - \psi_{2\nu+2}(\nu-1)]\,\delta^{2\nu} f(i) + \int_0^1 R_{2n}\,dx$$

or on a

$$\psi_{2\nu+2}(\nu+1) - \psi_{2\nu+2}(\nu) = \Delta\psi_{2\nu+2}(\nu) = \psi_{2\nu+1}(\nu),$$

de plus, à cause de la symétrie des polynomes ψ_i (§ **6.** formule (1)), on a

$$\psi_{2\nu+1}(\nu) = -\psi_{2\nu+1}(\nu-1);$$

remarquons en outre que

$$f(i+1) + f(i) = 2\mu f\left(i+\frac{1}{2}\right)$$

μ étant le symbole de la moyenne centrale. Des rélations précédentes il résulte

$$(3)\quad \int_0^1 f(x+i)\,dx = 2\sum_{\nu=0}^{n} \psi_{2\nu+1}(\nu)\,\mu\delta^{2\nu} f\left(i+\frac{1}{2}\right) + \int_0^1 R_{2n}\,dx$$

Pour obtenir $\int_0^z f(x)\,dx$, il suffit de faire la somme des quantités (3), i variant de 0 à z; il suit

$$\int_0^z f(x)\,dx = 2\sum_{\nu=0}^{n} \psi_{2\nu+1}(\nu) \sum_{i=0}^{z} \mu\delta^{2\nu} f\left(i+\frac{1}{2}\right) + \sum_{i=0}^{z}\int_0^1 R_{2n}\,dx.$$

On peut montrer facilement que si $\nu=0$, on a $\psi_1(0)=\frac{1}{2}$ et

$$\sum_{i=0}^{z} \mu f\left(i+\frac{1}{2}\right) = \sum_{i=0}^{z} f(i) + \frac{1}{2}f(z) - \frac{1}{2}f(0),$$

de plus, si $\nu>0$,

$$\sum_{i=0}^{z} \mu\delta^{2\nu} f\left(i+\frac{1}{2}\right) = \mu\delta^{2\nu-1}f(z) - \mu\delta^{2\nu-1}f(0).$$

On en conclut

$$\begin{aligned}\int_0^z f(x)\,dx = \sum_{x=0}^{z} f(x) + \frac{1}{2}[f(z)-f(0)] + \\ + \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{2\nu+1}(\nu)\,[\mu\delta^{2\nu-1}f(z) - \mu\delta^{2\nu-1}f(0)] + \sum_{i=0}^{z}\int_0^1 R_{2n}\,dx.\end{aligned} \tag{4}$$

La formule (4) ainsi obtenue est une seconde formule de sommation analogue à la formule de Maclaurin—Euler, mais le développement est fait suivant les différences centrales. Les constantes $\psi_{2\nu+1}(\nu)$ s'obtiennent très facilement à l'aide des nombres b_i, en se servant de la formule (2) du § **1**. Il suffit y poser $x=\nu$ et $n=2\nu+1$.

Il en résulte:

$$\psi_{2\nu+1}(\nu) = \binom{\nu}{\nu} b_{\nu+1} + \binom{\nu}{\nu-1} b_{\nu+2} + \ldots + \binom{\nu}{0} b_{2\nu+1}.$$

On trouve

$$\psi_1(0) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\psi_3(1) = -\frac{1}{24} = -0{,}04166\ 66667$$

$$\psi_5(2) = \frac{11}{1440} = 0{,}00763\ 88889$$

$$\psi_7(3) = -\frac{191}{120960} = -0{,}00157\ 90344$$

$$\psi_9(4) = \frac{2497}{7257600} = 0{,}00034\ 40531.$$

§ **4.** Développement des fonctions en série de polynomes de Bernoulli de seconde espèce. Si $\Sigma f(x+a)$ est développable en série de Newton, on peut écrire

$$\Sigma f(x+a)=\Sigma f(a)+\binom{x}{1}f(a)+\binom{x}{2}\Delta f(a)+\ldots+\binom{x}{n}\Delta^{n-1}f(a)+R_{n+1}.$$

Prenons la dérivée des deux membres par rapport à a et posons $a=0$, il s'en suit

$$D\Sigma f(x)=D\Sigma f(0)+\binom{x}{1}Df(0)+\binom{x}{2}D\Delta f(0)+\ldots+[D_a R_{n+1}]_{a=0}.$$

Multiplions les deux membres par dx et intégrons; il résulte

$$\Sigma f(x)=\psi_1 D\Sigma f(0)+\psi_2 Df(0)+\psi_3 D\Delta f(0)+\ldots+\int[D_a R_{n+1}]_{a=0}dx.$$

L'opération des différences finies exécutée aux deux membres, par rapport à x, en supposant $\Delta x=1$, donne

(1) $$f(x)=D\Sigma f(0)+\psi_1 Df(0)+\ldots+\Delta\int[D_a R_{n+1}]_{a=0}dx.$$

Remarquons que l'on peut mettre R_{n+1} sous la forme

$$R_{n+1}=\binom{x}{n+1}D^{n+1}\Sigma f(a+\xi)$$

où $0<\xi<n$ ou $0<\xi<x$. Par suite, on peut écrire le développement (1), de la manière suivante:

(2) $$f(x)=c_0+c_1\psi_1+c_2\psi_2+\ldots+c_n\psi_n+\mathcal{R}_{n+1}.$$

En identifiant les coefficients, on a

$$c_0=[D\Sigma f(x)]_{x=0},\quad c_s=[D\Delta^{s-1}f(x)]_{x=0},$$

de plus

$$\mathcal{R}_{n+1}=\int_x^{x+1}\binom{t}{n+1}[D_a D_t^{n+1}\Sigma f(a+\xi)]_{a=0}dt$$

où ξ est une fonction de t telle que $0<\xi<n$, ou $0<\xi<t$.

Lorsqu'on a $D_a D^{n+1}\Sigma f(\xi+a)>0$ pour toutes les valeurs de t telles que $x<t<x+1$, on aura

$$\mathcal{R}_{n+1}=\psi_{n+1}(x)D_a D^{n+1}\Sigma f(\eta)$$

où η est une fonction de x satisfaisant à $0<\eta<n$ ou $0<\eta<x$.

Exemple 3. Soit $\Sigma f(x)=2^x$, on en tire $f(x)=2^x$ et $\Delta^{s-1}f(x)=2^x$; de plus, $D\Sigma f(x)=2^x\log 2$ et $D\Delta^{s-1}f(x)=2^x\log 2$, par suite $c_0=c_s=\log 2$, donc

(3) $$2^x=[1+\psi_1+\psi_2+\psi_3+\ldots]\log 2;$$

comme $\psi_n(0) = b_n$, en posant dans (3) $x=0$, on trouve la relation

$$(4) \qquad \frac{1}{\log 2} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i = 1{,}44269\ 522.$$

Remarque. En développant d'une manière analogue $f(x) = 1/2^x$, on arrive à la relation

$$2 - \frac{1}{2\log 2} = \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1{,}27865\ 239.$$

Exemple 4. Soit $\Sigma f(x) = \varphi_{n+1}(x)$, où $\varphi_{n+1}(x)$ est le polynome de BERNOULLI de première espèce de degré $n+1$. (*Voir* la note[2]).) Il en résulte

$$f(x) = x^n/n!\,; \quad D\Sigma f(x) = \varphi_n(x)\,; \quad Df(x) = x^{n-1}/(n-1)!$$

en outre $\Delta^{\nu-1} Df(x) = \Delta^{\nu}\left[\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]$, on en conclut

$$c_0 = \varphi_n(0) = \frac{B_n}{n!}, \quad c_1 = 0, \quad c_\nu = \frac{(\nu-1)!}{(n-1)!} \mathfrak{S}_{n-1}^{\nu-1}.$$

Les nombres $\mathfrak{S}_k^i$ étant les nombres de STIRLING de seconde espèce définis par

$$\left[\Delta^i \frac{x^k}{i!}\right]_{x=0} = \mathfrak{S}_k^i.$$

Le développement cherché sera donc

$$(5) \qquad \frac{x^n}{n!} = \frac{B_n}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}[\psi_2 \mathfrak{S}_{n-1}^1 + 2!\psi_3 \mathfrak{S}_{n-1}^2 + \ldots + (n-1)!\psi_n \mathfrak{S}_{n-1}^{n-1}].$$

En posant dans (5) $x=0$, on trouve la relation suivante, qui donne les nombres de Bernoulli B_n en fonction des coefficients b_i des polynomes de BERNOULLI de seconde espèce :

$$B_n = -n\,[b_2 \mathfrak{S}_{n-1}^1 + 2!\,b_3 \mathfrak{S}_{n-1}^2 + \ldots + (n-1)!\,b_n \mathfrak{S}_{n-1}^{n-1}].$$

Remarque. En développant $f(x) = \binom{x}{n}$ suivant des polynomes de BERNOULLI de première espèce, on obtient d'une manière analogue la relation donnant les nombres b_n en fonction des nombres de BERNOULLI

$$b_n = -\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{B_2}{2} S_{n-1}^1 + \frac{B_4}{4} S_{n-1}^3 + \frac{B_6}{6} S_{n-1}^5 + \ldots + \frac{B_n}{n} S_{n-1}^{n-1}\right],$$

où les nombres S_k^ν sont les nombres de STIRLING de première espèce, mentionnés au § 1.

Exemple 5. On peut utiliser le développement suivant des polynomes de Bernoulli pour déterminer la fonction génératrice de ces polynomes; il suffit de disposer de $\Sigma f(x)$ de manière que c_s soit égale à t^s. On trouve que

$$\Sigma f(x) = \frac{(1+t)^x}{\log(1+t)}$$

remplit cette condition; en effet, il résulte

$$f(x) = \frac{t(1+t)^x}{\log(1+t)}, \quad D\Sigma f(x) = t(1+t)^x, \quad \Delta^{s-1} Df(x) = t^s(1+t)^x$$

et par suite $c_s = t^s$.

La fonction $f(x)$ est donc la fonction génératrice de $\psi_n(x)$. En posant $x=0$ dans $f(x)$, on obtient la fonction génératrice des coefficients b_i

$$\frac{t}{\log(1+t)} = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots \tag{6}$$

En y posant $t=1$, on retrouve la relation (4).

Posons encore dans (6) $t=-1$, il résulte

$$0 = 1 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots;$$

comme $b_{2n}<0$, $b_{2n-1}>0$ et $b_0=1$, on peut écrire cette relation

$$\sum_{i=0}^{\infty} |b_i| = 2.$$

§ 5. Déduisons encore quelques formules qui seront utiles plus tard. De $\Delta F(x) = f(x)$ on conclut

$$\Delta F(a-x) = -[F(a-x) - F(a-x-1)] = -f(a-x-1)$$

ce qui donne dans le cas particulier des polynomes ψ_n

(1) $\Delta\psi_n(a-x) = -\psi_{n-1}(a-x-1)$

$\Delta^s\psi_n(a-x) = (-1)^s \psi_{n-s}(a-x-s)$

(2) $\Sigma\psi_n(a-x) = -\psi_{n+1}(a-x+1) + \omega(x)$ où $\omega(x+1) = \omega(x)$.

§ 6. Polynomes de Bernoulli de seconde espèce de degré impair. Symétrie des polynomes. On a

$$D\psi_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n)!} x(x-1)\dots(x-2n+1).$$

Comme cette dérivée s'annule pour $x=0, 1, 2, \dots, (2n-1)$ en changeant de signe, les extréma de ψ_{2n+1} ont lieu pour ces valeurs. De $-\infty$ à 0 la dérivée est positive, on en conclut, que la fonction est maximum pour $x=0, 2, 4, \ldots, 2n-2$ et minimum pour $x=1, 3, \ldots, 2n-1$.

En introduisant la variable ξ par la relation $x=n-\frac{1}{2}+\xi$, on a

$$D\psi_{2n+1}\left(n-\frac{1}{2}+\xi\right)=$$
$$=\frac{1}{(2n)!}\left[\xi^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[\xi^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\ldots\left[\xi^2-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\right].$$

La dérivée étant une fonction pair en ξ, son intégrale sera une fonction impair, par suite

$$\psi_{2n+1}\left(n-\frac{1}{2}+\xi\right)=-\psi_{2n+1}\left(n-\frac{1}{2}-\xi\right) \text{ ou bien}$$

$$\psi_{2n+1}(x)=-\psi_{2n+1}(2n-1-x). \tag{1}$$

Les valeurs de la fonction ψ_{2n+1} sont donc symétriques par rapport au point de coordonnées $x=n-\frac{1}{2}$, $y=0$.

Cas particuliers :

$$\psi_{2n+1}\left(n-\frac{1}{2}\right)=-\psi_{2n+1}\left(n-\frac{1}{2}\right)=0,$$
$$\psi_{2n+1}(0)=-\psi_{2n+1}(2n-1)=b_{2n+1}.$$

Il en résulte les relations suivantes entre les coefficients b_i

$$\binom{n-\frac{1}{2}}{2n+1}b_0+\binom{n-\frac{1}{2}}{2n}b_1+\binom{n-\frac{1}{2}}{2n-1}b_2+\ldots+\binom{n-\frac{1}{2}}{0}b_{2n+1}=0$$

$$\binom{2n-1}{2n-1}b_2+\binom{2n-1}{2n-2}b_3+\ldots+\binom{2n-1}{1}b_{2n}+2b_{2n+1}=0.$$

Elles permettent de déterminer b_{2n+1} lorsqu'on connaît les coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_{2n}$. La première formule se simplifie en remarquant que ses deux premiers termes sont égaux et de signe contraire, et par suite on peut les omettre.

Montrons que depuis $x=0$ jusqu'au point de symétrie *les maxima vont en diminuant*

$$\psi_{2n+1}(0)>\psi_{2n+1}(2)>\psi_{2n+1}(4)>\ldots$$

Il suffit de prouver que

$$\psi_{2n+1}(2\nu+2)-\psi_{2n+1}(2\nu)=\int_{2\nu}^{2\nu+2}\binom{x}{2n}dx<0 \text{ si } 0<x<n-\frac{1}{2}.$$

On peut écrire cette intégrale

$$\text{(2)} \qquad \int_{2\nu+1}^{2\nu+2} \left[\binom{x}{2n}+\binom{x-1}{2n}\right]dx = \int_{2\nu+1}^{2\nu+2} \binom{x-1}{2n-1}\frac{x-n}{2n}\,dx.$$

Or le premier facteur est positif quelque soit ν; le second sera négatif si $x<n$ ou $2\nu \leqslant n-2$. Les maxima vont donc bien en diminuant jusque au point de symétrie. Pour montrer que *tous les maxima sont positif,* il suffit de montrer que le maximum le plus proche du point de symetrie est positif; pour montrer que tous les minima sont négatifs il faut montrer que le minimum le plus proche du point de symétrie est négatif. Ces extréma ont lieu pour $x=n-1$ et pour $x=n$.

La différence entre zéro et l'extrémum $\psi_{2n+1}(n-1)$ s'exprime par

$$\int_{n-1}^{n-\frac{1}{2}} \binom{x}{2n} dx = -\psi_{2n+1}(n-1).$$

Dans l'intervalle considéré $\binom{x}{2n}$ a le même signe que $(-1)^n$; il en résulte que, si n est pair, $\psi_{2n+1}(n-1)<0$, d'après ce que nous avons vu c'est un minimum, donc *tous les minima sont négatifs;* si n est impair, il résulte $\psi_{2n+1}(n-1)>0$, c'est un maximum, donc *tous les maxima sont positifs.*

Conclusion: Pour toutes les valeurs paires de x le polynome $\psi_{2n+1}(x)$ est positif, pour toutes les valeurs impaires de x il est négatif pourvu que l'on ait $0 \leqq x \leqq 2n-1$.

Remarque. De la formule (2) il résulte que

$$\int_{-1}^{1} \binom{x}{2n} dx = \psi_{2n+1}(1) - \psi_{2n+1}(-1) > 0;$$

on en tire

$$\psi_{2n+1}(-1) < 0$$

et à cause de la relation exprimant la symétrie, $\psi_{2n+1}(2n)>0$. On conclut qu'entre $x=-1$ et $x=2n$ le polynome $\psi_{2n+1}(x)$ change $2n+1$ fois de signe, donc toutes les racines sont réelles, simples et elles sont toutes comprises dans cet intervalle. De

$$\psi_{2n+1}(-1) = -b_0 + b_1 - b_2 + \ldots + b_{2n+1} < 0$$

on déduit

$$\sum_{i=0}^{2n} |b_i| < 2.$$

§ **7.** Polynomes de Bernoulli de seconde espèce de degré pair. Symétrie des polynomes. Comme $\Delta\psi_{2n+1}(x) = \psi_{2n}(x)$, on déduit de

$$\psi_{2n+1}(x) = -\psi_{2n+1}(2n-1-x)$$

en se servant de la formule (1) du § **5.**, la relation suivante

$$\psi_{2n}(x) = \psi_{2n}(2n-2-x),$$

c.-à-d. que le polynome $\psi_{2n}(x)$ est symétrique par rapport à la droite $x = n-1$.

Dans le cas particulier où $x = 0$

$$\psi_{2n}(0) = \psi_{2n}(2n-2),$$

on en tire la relation

$$\binom{2n-2}{2n-2} b_2 + \binom{2n-2}{2n-3} b_3 + \ldots + \binom{2n-2}{1} b_{2n-1} = 0.$$

Cette équation permet de calculer b_{2n-1} lorsque l'on connait $b_2, b_3, \ldots, b_{2n-2}$. Par exemple pour $n = 6$ on trouve

$$b_2 + 10b_3 + 45b_4 + 120b_5 + 210b_6 + 252b_7 + 210b_8 + 120b_9 + \\ + 45b_{10} + 10b_{11} = 0$$

et, en utilisant les données des tables du § **1.**, $b_{11} = 0{,}00592\ 40563$.

La dérivée du polynome $\psi_{2n}(x)$

$$D\psi_{2n}(x) = \frac{1}{(2n-1)!} x(x-1)(x-2)\ldots(x-2n+2)$$

montre que ses extréma ont lieu pour $x = 0, 1, 2, \ldots, 2n-2$, de plus comme cette dérivée est négative entre $-\infty$ et 0, les minima ont lieu pour $x = 0, 2, 4, \ldots, 2n-2$, et les maxima pour $x = 1, 3, 5, \ldots, 2n-3$.

On peut montrer de la même manière qu'au § précédent que de zéro à la droite de symétrie, les maxima vont en diminuant et les minima en augmentant.

Pour prouver que tous les maxima sont positifs et tous les minima négatifs, il suffit de faire voir que le maximum le plus rapproché de la doite de symétrie est positif et le minimum le plus rapproché négatif.

Remarquons qu'un des extréma se trouve sur cette droite. On a

$$\psi_{2n}(n-1) = \psi_{2n+1}(n) - \psi_{2n+1}(n-1).$$

Lorsque n est pair, $\psi_{2n}(n-1)$ est un maximum; il est positiv, car d'après ce qu'on a vu au § **6.**, le second membre est dans ce cas plus grand que zéro. Lorsque n est impair, $\psi_{2n}(n-1)$ est un minimum; il est négatif, car dans ce cas le second membre est plus petit que zéro.

En refaisant le même raisonnement sur

$$\psi_{2n}(n-2) = \psi_{2n+1}(n-1) - \psi_{2n+1}(n-2)$$

on aura prouvé que tous les maxima sont postifs et tous les minima négatifs, c.-à.-d.

$$\psi_{2n}(2m) < 0, \quad \psi_{2n}(2m+1) > 0 \quad \text{si } 0 \leqq x \leqq 2n-2.$$

Le *minimum minimorum* est atteint pour $x=0$ et pour $x=2n-2$, pour ces valeurs on a $\psi_{2n}(0) = b_{2n} < 0$. Comme $\psi_{2n}(\pm\infty) > 0$, on en conclut que pour toutes les valeurs de x on a

$$(1) \qquad \psi_{2n}(x) - b_{2n} \geqq 0.$$

Cette relation importante servira plus tard.

On peut montrer par une formule semblable à (2) du § **6.** que

$$\int_{-1}^{1} \binom{x}{2n-1} dx < 0,$$

il en résulte $\psi_{2n}(-1) > \psi_{2n}(1) > 0$; et par suite aussi $\psi_{2n}(2n-1) > 0$.

On en déduit qu'entre -1 et $2n-1$ le polynome $\psi_{2n}(x)$ change $2n$ fois de signe, toutes ses racines sont donc réelles, simples et comprises entre ces valeurs.

Résumé. Symétrie des polynomes $\psi_n(x)$:

$$\psi_n\left(\frac{1}{2}n - 1 + x\right) = (-1)^n \psi_n\left(\frac{1}{2}n - 1 - x\right).$$

Toutes les racines de $\psi_n(x) = 0$ sont réelles, simples et elles sont toutes comprises entre -1 et $n-1$.

Les maxima de ψ_n sont positifs, les minima négatifs. Les valeurs absolues des extréma vont en diminuant de $x=0$ à $x = \frac{1}{2}n - 1$.

§ **8.** Formule de sommation. Posons dans la formule (2) du § **2.** $a=0$ et $m=z$, on obtient, $f(x)$ étant un polynome,

$$\int_0^z f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{z} f(i) + b_1[f(z) - f(0)] + b_2[\Delta f(z) - \Delta f(0)] + $$
$$+ b_3[\Delta^2 f(z) - \Delta^2 f(0)] + \ldots$$

où z est nombre entier.

Cette formule est semblable à celle de MACLAURIN—EULER, mais au lieu des dérivées de $f(x)$ ce sont ses différences finies qui y figurent.

Pour déduire une formule de sommation valable dans le cas d'une fonction $f(x)$ quelconque, partons de $\Sigma f(x)$ en utilisant plusieurs fois successivement la formule connue de la sommation par parties. Pour déduire cette formule désignons pour abréger $\Sigma V_i(x) = V_{i+1}(x)$, on aura alors

$$\Sigma[U(x)\, V_0(x)] = U(x)\, V_1(x) - \Sigma[V_1(x+1)\, \Delta U(x)].$$

La sommation par parties executée sur la somme du second membre donne

$$\Sigma[V_1(x+1)\, \Delta U(x)] = V_2(x+1)\, \Delta U(x) - \Sigma[V_2(x+2)\, \Delta^2 U(x)].$$

La troisième sommation par parties conduit à

$$\Sigma[V_2(x+2)\, \Delta^2 U(x)] = V_3(x+2)\, \Delta^2 U(x) - \Sigma[V_3(x+3)\, \Delta^3 U(x)]$$

et ainsi de suite, de manière que l'on arrive à

$$\begin{aligned} &\Sigma V_0(x)\, U(x) = \\ (1)\quad &= V_1(x)\, U(x) - V_2(x+1)\, \Delta U(x) + V_3(x+2)\, \Delta^2 U(x) - \ldots + \\ &+ (-1)^{n+1} V_n(x+n-1)\, \Delta^{n-1} U(x) + (-1)^n \Sigma[V_n(x+n)\Delta^n U(x)]. \end{aligned}$$

On voit que les sommations par parties successives livrent des termes dont l'argument va en croissant. Cette avance des arguments rend compliqué l'emploi de la formule. On peut l'éviter dans certains cas, par exemple lorsque $V_0(x) = 1$ et si l'on execute les sommations à l'aide de la formule (2) du § **5.** En omettant la fonction périodique arbitraire on peut écrire

$$\begin{aligned} \Sigma 1 &= -\psi_1(u-x) = V_1(x) \\ -\Sigma \psi_1(u-x) &= \psi_2(u-x+1) = V_2(x) \\ \Sigma \psi_2(u-x+1) &= -\psi_3(u-x+2) = V_3(x) \end{aligned}$$

et ainsi de suite; on remarque que dans ces sommations il y a retrogradation de l'argument, ce qui va compenser l'avance dûe à la sommation par parties. En posant $U(x) = f(x)$ la formule (1) devient

$$(2)\quad \begin{aligned} &\Sigma f(x) = -\psi_1(u-x) f(x) - \psi_2(u-x)\, \Delta f(x) - \ldots - \\ &-\psi_{n-1}(u-x)\Delta^{n-2} f(x) + \Sigma[\psi_{n-1}(u-x-1)\, \Delta^{n-1} f(x)]. \end{aligned}$$

Comme on peut ajouter à une somme indéfinie une constante arbitraire quelconque, écrivons la somme qui figure au second membre, pour simplifier les résultats, de la manière suivante:

$$\Sigma[\psi_{n-1}(u-x-1)\Delta^{n-1}f(x)] =$$
$$= [-\psi_n(u-x)+b_n]\Delta^{n-1}f(x)+\Sigma[\psi_n(u-x-1)-b_n]\Delta^n f(x).$$

Pour abréger, désignons la dernière somme par $\varrho_n(x, u)$; on aura

$$\Sigma f(x) = -\sum_{\nu=1}^{n+1}\psi_\nu(u-x)\Delta^{\nu-1}f(x)+b_n\Delta^{n-1}f(x)+\varrho_n(x, u).$$

Prenons la dérivée des deux membres par rapport à x, puis posons $x=u$ et remarquons que nous avons vu au § **1.** que $\psi_\nu(0)=b_\nu$, $D\psi_1(0)=1$ et $D\psi_\nu(0)=0$ si $\nu>1$. En écrivant de nouveau x au lieu de u, on a

$$D\Sigma f(x)=f(x)-\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu D\Delta^{\nu-1}f(x)+[D_x\varrho_n(x, u)]_{u=x}.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par dx et intégrons de a à z; $z-a$ devant être entier. Le premier membre devient égale à $[\Sigma f(x)]_{x=z}-[\Sigma f(x)]_{x=a}=\sum_{x=a}^{z} f(x)$; par suite

$$\sum_{x=a}^{z} f(x)=\int_a^z f(x)\,dx-\sum_{\nu=1}^{z} b_\nu[\Delta^{\nu-1}f(z)-\Delta^{\nu-1}f(a)]+ \tag{4}$$
$$+\int_a^z [D_x\varrho_n(x, u)]_{u=x}\,dx.$$

La formule de sommation (4) est valable pour des fonctions quelconques; elle est préférable à la formule de MACLAURIN—EULER dans le cas des fonctions dont les différences sont plus facilement calculables que les dérivées.

§ **9.** Transformation du reste. En choisissant l'indice pair, on a

$$\varrho_{2n}(x, u)=\Sigma[\psi_{2n}(u-x-1)-b_{2n}]\Delta^{2n}f(x).$$

Cette somme indéfinie n'est définie qu'à une fonction périodique arbitraire près, dont la période est égale à l'unité; soit $\omega(x)$ une telle fonction. La somme indéfinie précédente peut être remplacée par la somme définie suivante

$$\varrho_{2n}(x, u)=\sum_{t=u-1}^{x}[\psi_{2n}(u-t-1)-b_{2n}]\Delta^{2n}f(t)+\omega(x)$$

$x-u$ devant être entier.

D'après ce que nous avons vu, (1) § **7.**, on a toujours $\psi_{2n}(x) - b_{2n} \geqq 0$, on peut donc employer le théorème de la moyenne, et l'expression précédente devient:

$$\varrho_{2n}(x, u) = \Delta^{2n} f(\xi) \sum_{t=u-1}^{x} [\psi_{2n}(u-t-1) - b_{2n}] + \omega(x)$$

où ξ est une certaine fonction de x telle que $u-1 < \xi < x$. Effectuons la sommation d'après la formule (2) du § **5.** On trouve

$$\varrho_{2n}(x, u) = \Delta^{2n} f(\xi) [-\psi_{2n+1}(u-x) + \\ + \psi_{2n+1}(1) - (x-u+1) b_{2n}] + \omega(x).$$

Maintenant on peut prendre la dérivée de ϱ_{2n} par rapport à x; en remarquant que $\psi_{2n+1}(1) = b_{2n} + b_{2n+1}$, on trouve

$$D_x \varrho_{2n}(x, u) = \Delta^{2n} Df(\xi) [-\psi_{2n+1}(u-x) + (u-x) b_{2n} + b_{2n+1}] + \\ + \Delta^{2n} f(\xi) [D\psi_{2n+1}(u-x) - b_{2n}] + D\omega(x).$$

Il faut encore poser $x = u$, comme $\psi_{2n+1}(0) = b_{2n+1}$ et $D\psi_{2n+1}(0) = 0$, le premier terme disparait et l'on a

$$[D_x \varrho_{2n}(x, u)]_{x=u} = - b_{2n} \Delta^{2n} f(\xi) + D\omega(x)$$

enfin écrivons x au lieu de u, multiplions les deux membres par dx et intégrons de a à z; comme $z-a$ est entier, $\omega(z) = \omega(a)$; le reste obtenu sera

$$R_{2n} = - b_{2n} \int_a^z \Delta^{2n} f(\xi)\, dx \quad \text{où } x-1 < \xi < x.$$

En employant encore une fois le théorème de la moyenne, on a aussi

$$R_{2n} = - b_{2n} (z-a) \Delta^{2n} f(\eta) \quad \text{où } a-1 < \eta < z.$$

Enfin la formule sommatoire avec le reste sera

$$(1) \qquad \sum_{x=a}^{z} f(x) = \int_a^z f(x)\, dx - \sum_{\nu=1}^{2n} b_\nu [\Delta^{\nu-1} f(z) - \Delta^{\nu-1} f(a)] - \\ - b_{2n} (z-a) \Delta^{2n} f(\eta).$$

Cette formule, dans laquelle $\Delta x = 1$, peut être facilement généralisée pour une variable y prenant les valeurs $y_0, y_0+h, y_0+2h, \ldots$; il suffit de remplacer x par $x = a + \frac{1}{h}(y - y_0)$.

Cas particulier remarquable: Faisons dans la formule précédente $z = a+1$, alors on trouve,

$$(2)\qquad \int_a^{a+1} f(x)\,dx = f(a) + \sum_{\nu=1}^{2n} b_\nu \varDelta^\nu f(a) + b_{2n}\varDelta^{2n} f(\eta).$$

$$(a-1<\eta<a+1).$$

A cause de sa simplicité cette formule est très pratique pour *la quadrature des fonctions,* dont les différences sont plus facilement calculables que les dérivées.

Exemple 6. Déterminons l'intégrale de $\psi_n(x)$ entre 0 et 1. La formule (2) donne:

$$\int_0^1 \psi_n(x)\,dx = \psi_n(0) + \sum_{\nu=1}^{n+1} b_\nu \varDelta^\nu \psi_n(0) = b_0 b_n + b_1 b_{n-1} + b_2 b_{n-2} + \dots b_n b_0.$$

Les formules précédentes peuvent présenter d'autres avantages sur la formule Maclaurin—Euler; en effet, il arrive quelquefois que cette dernière prolongée indéfiniment forme une série divergente, tandis que les séries dévéloppées suivant les différences successives sont convergentes. C'est ce qui arrive par exemple pour $f(x) = \frac{1}{x}$. En effet $D^n\left(\frac{1}{x}\right)$ augmente indéfiniment avec n si x reste fini, par contre $\lim \varDelta^n\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ pour $n=\infty$; par suite, comme la série des différences est une série alternée, elle est convergente.

§ **10.** Considérons le cas particulier suivant: Pour toutes les valeurs de n on a $\varDelta^{2n} f(x) > 0$ et $\varDelta^{2n+1} f(x) < 0$. On en conclut immédiatement que $R_{2n} > 0$ quel que soit n, de plus comme

$$R_{2n} = -b_{2n}[\varDelta^{2n-1} f(z) - \varDelta^{2n-1} f(a)] - b_{2n+1}[\varDelta^{2n} f(z) - \varDelta^{2n} f(a)] + R_{2n+2}$$

ou encore

$$R_{2n} = -b_{2n}\sum_{x=a}^{z} \varDelta^{2n} f(x) - b_{2n+1}\sum_{x=a}^{z} \varDelta^{2n+1} f(x) + R_{2n+2};$$

comme $b_{2n} < 0$ et $b_{2n+1} > 0$, il résulte que R_{2n} est la somme de trois quantités positives et que $R_{2n} > R_{2n+2}$. Si en outre $\lim_{n=\infty} \varDelta^n f(x) = 0$ pour toutes les valeurs de x considérées, on a aussi

$$\lim_{n=\infty} R_{2n} = 0$$

et

$$\sum_{x=a}^{z} f(x) - \int_a^z f(x)\,dx = -\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu\,[\Delta^{\nu-1} f(z) - \Delta^{\nu-1} f(a)].$$

Exemple 7. Soit $f(x)=\frac{1}{x}$. Il résulte $\Delta^n f(x)=\frac{(-1)^n n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$; lorsque $x>0$, on a $\lim\limits_{n=\infty} \Delta^n f(x)=0$, par suite

$$\sum_{x=a}^{z}\frac{1}{x}-\int_a^z\frac{1}{x}\,dx=-\sum_{\nu=1}^{2n} b_\nu[\Delta^{\nu-1}f(z)-\Delta^{\nu-1}f(a)]-b_{2n}(z-a)\Delta^{2n}f(\eta).$$

Si $n=\infty$, $a=1$ et $z=\infty$, on obtient une formule donnant la constante d'Euler

$$C=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{b_\nu}{\nu}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{b_\nu}{\nu}\right|$$

Si l'on fait $n=\infty$, $a=1$, $z=2$, on trouve

$$\log 2 = 1-\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{b_\nu}{\nu+1}\right|$$

Faisons encore $n=2$, $a=20$ et $z=100$; dans ce cas on trouve

$$\sum_{x=20}^{100}\frac{1}{x}=\log 5+b_1\left[\frac{1}{20}-\frac{1}{100}\right]-\frac{b_2}{2}\left[\frac{1}{\binom{21}{2}}-\frac{1}{\binom{101}{2}}\right]+$$

$$+\frac{b_3}{3}\left[\frac{1}{\binom{22}{3}}-\frac{1}{\binom{102}{3}}\right]+R_4=1{,}589637+R_4$$

Comme $19<\eta<100$, on a

$$-R_4<\frac{16\,b_4}{\binom{\eta+4}{5}}<0{,}000126.$$

En réalité l'erreur est égale à 0,000099.

Table I.

x	$\psi_1(x)$	$\psi_2(x)$	$\psi_3(x)$	$\psi_4(x)$	$\psi_5(x)$
0	0,5	— 0,08333 33333	0,04166 66667	— 0,02638 88889	0,01875
1	1,5	0,41666 66667	— 0,04166 66667	0,01527 77778	— 0,00763 88889
2	2,5	1,91666 66667	0,375	— 0,02638 88889	0,00763 88889
3	3,5	4,41666 66667	2,29166 66667	0,34861 11111	— 0,01875
4	4,5	7,91666 66667	6,70833 33333	2,64027 77778	0,32986 11111
5	5,5	12,41666 66667	14,625	9,34861 11111	2,97013 88889
6	6,5	17,91666 66667	27,04166 66667	23,97361 11111	12,31875
7	7,5	24,41666 66667	44,95833 33333	51,01527 77778	36,29236 11111
8	8,5	31,91666 66667	69,375	95,97361 11111	87,30763 88889
9	9,5	40,41666 66667	101,29166 66667	165,34861 11111	183,28125

x	$\psi_6(x)$	$\psi_7(x)$	$\psi_8(x)$	$\psi_9(x)$	$\psi_{10}(x)$
0	— 0,01426 91799	0,01136 73942	— 0,00935 65366	0,00789 25540	— 0,00678 58500
1	0,00448 08201	— 0,00290 17857	0,00201 08576	— 0,00146 39826	0,00110 67040
2	— 0,00315 80688	0,00157 90344	— 0,00089 09881	0,00054 68750	— 0,00035 72786
3	0,00448 08201	— 0,00157 90344	0,00068 81063	— 0,00034 40531	0,00018 95964
4	— 0,01426 91799	0,00290 17857	— 0,00089 09281	0,00034 40531	— 0,00015 44567
5	0,31559 19312	— 0,01136 73942	0,00201 08576	— 0,00054 68750	0,00018 95964
6	3,28573 03201	0,30422 45370	— 0,00935 65366	0,00146 39826	— 0,00035 72786
7	15,60448 08201	3,58995 53571	0,29486 80004	— 0,00789 25540	0,00110 67040
8	51,89684 19312	19,13443 61772	3,88482 33575	0,28697 54464	— 0,00678 58500
9	139,20448 08201	71,09127 81084	23,07925 95347	4,17179 88029	0,28018 95964

Table II.

x	$\psi_2(x)$	$\psi_4(x)$	$\psi_6(x)$	$\psi_8(x)$	$\psi_{10}(x)$
— 5	12,41666 66667				
— 4	7,91666 66667	23,97361 11111			
— 3	4,41666 66667	9,34861 11111	15,60448 08201		
— 2	1,91666 66667	2,64027 77778	3,28573 08201	3,88482 33575	
— 1	0,41666 66667	0,34861 11111	0,31559 19312	0,29486 80004	0,28018 95964
0,	— 0,08333 33333	— 0,02638 88889	— 0,01426 91799	— 0,00935 65366	— 0,00678 58500
1	0,41666 66667	0,01527 77778	0,00448 08201	0,00201 08576	0,00110 67040
2	1,91666 66667	— 0,02638 88889	— 0,00315 80688	— 0,00089 09281	— 0,00035 72786
3	4,41666 66667	0,34861 11111	0,00448 08201	0,00068 81063	0,00018 95964
4	7,91666 66667	2,64027 77778	— 0,01426 91199	— 0,00089 09281	— 0,00015 44567
5	12,41666 66667	9,34861 11111	0,31559 19312	0,00201 08576	0,00018 95964
6		23,97361 11111	3,28573 08201	— 0,00935 65366	— 0,00035 72786
7			15,60448 08201	0,29486 80004	0,00110 67040
8				3,88482 33575	— 0,00678 58500
9					0,28018 95964

(Reçu le 24 décembre 1928.)

Über die Verteilung iterierter Summen von positiven Nullfolgen mod 1.

Von PAUL CSILLAG in Budapest.

I.

Wir bezeichnen mit a und p reelle und positive Zahlen, mit n eine natürliche Zahl und wir betrachten die Zahlenfolge

$$q_n = q_n(a, p) = \text{gebrochener Teil von } a\,n^p \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Bei welchen Werten der Parameter a, p liegt die Folge $q_n(a, p)$ im Intervall (0, 1) überall dicht?

Wir unterscheiden mehrere Fälle.

1) $p = 1$. Wenn a eine rationale Zahl bedeutet, so hat die Folge nur endlich viele verschiedene Werte, wenn aber a irrational ist, so liegt die Folge nach klassischen Resultaten im Intervall (0, 1) überall dicht, nach neueren Untersuchungen sogar *gleichmässig dicht.*

2) p ist ganz und grösser als Eins. Bei rationalem a ist die Folge wieder nur endlich vieler verschiedener Werte fähig. Bei irrationalem a liegt die Folge nach tiefen Untersuchungen von HARDY und LITTLEWOOD[1]) im Intervall (0, 1) gleichmässig dicht.

3) $0 < p < 1$. In diesem Falle liegt die Folge, ob a rational oder irrational, nach Herrn FEJÉR[2]) im Intervall (0, 1) gleichmässig dicht. Dies ist eine Folge der Tatsache, dass in diesem Falle $\lim\limits_{n=\infty} | q_n - q_{n-1} | = 0$.

---

[1]) G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD, Some Problems of Diophantine Approximation, *Acta Mathematica*, **37** (1914), p. 155—239.

[2]) L. FEJÉR, A FOURIER-féle sorról, *Mathematikai és természettudományi értesitő*, **24** (1906), S. 192—297., oder Sur la série de FOURIER, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris*, **142** (1906), p. 501—503. Siehe noch G. PÓLYA und G. SZEGŐ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin, 1925, S. 67—77. Vergleiche besonders S. 72., Aufgabe 175.

4) $p=$ keine ganze Zahl >1.[3]) Wir wollen durch Anwendung eines vielleicht an sich nicht uninteressanten Satzes beweisen, dass für jedes a die Folge im Intervall (0, 1) überall dicht liegt.[4])

Die überalldichte Lage der Folge q_n bei nichtganzem positivem p folgern wir daraus, dass die Folge an^p durch wiederholte Summation aus einer positiven Nullfolge entsteht.

Die ersten Glieder der Folge sind offenbar irrelevant und die $[p]+1$-te Differenz der Folge ist positiv und asymptotisch gleich der $[p]+1$-ten Derivierten von an^p nach n, also

$$ap(p-1)\ldots(p-[p])\,n^{p-[p]-1},$$

also bilden diese Differenzen eine positive Nullfolge mit divergenter Summe.

Für solche Folgen beweisen wir aber allgemein den

Satz. *Sei*

$$d_n>0 \qquad (n=1,2,\ldots),$$
$$d_n\to 0 \qquad (n\to\infty),$$
$$\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu = s_n \to \infty$$

(so dass also nach Herrn Fejér *die Bruchteile von s_n im Intervall (0, 1) überall dicht liegen).*

Setzen wir weiter

$$s'_n = s_1+s_2+\ldots+s_n,$$
$$s''_n = s'_1+s'_2+\ldots+s'_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$s^{(l)}_n = s^{(l-1)}_1+s^{(l-1)}_2+\ldots+s^{(l-1)}_n.$$

---

[3]) Die Fragestellung verdanke ich einer mündlichen Mitteilung von Herrn Fejér. Er hat dazu folgendes bemerkt: Die asymptotische Formel für die Koeffizienten der Potenzreihe um den Nullpunkt für die Funktion $e^{\frac{1}{z-1}}$ lautet:

$$n^{3/4}\sqrt{\pi e}\,a_n \sim \sin(2\sqrt{n}+{}^3/_4\,\pi).$$

Die Fragestellung 3) hängt also zusammen mit der Frage nach den Vorzeichenwechseln der Koeffizienten in der Potenzreihe einer einfachen elementaren Funktion. Siehe L. Fejér, Asymptotikus értékek meghatározásáról, *Mathematikai és természettudományi értesitő,* **27** (1909), S. 1—33., oder Sur une méthode de M. Darboux, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris,* **147** (1908), p. 1040—1042.

[4]) [Hinzugefügt am 17. Januar 1929.] Ich kann mit Hilfe einer anderen Methode auch die gleichmässig dichte Verteilung der Folge q_n beweisen, was ich für eine spätere Publikation vorbehalte.

Behauptung: für eine beliebige ganze Zahl l liegt die Folge der Bruchteile von $s_n^{(l)}$ im Intervall (0, 1) *überall dicht.*

II.

Um unseren Satz zu beweisen, beweisen wir das folgende Lemma, aus welchem durch vollständige Induktion unser Satz sofort gefolgert werden kann.

Lemma. *Wir bezeichnen mit s_n eine unendliche Folge von positiven Zahlen, mit σ_n die Folge der Bruchteile von s_n und setzen*

$$S_n = s_1 + s_2 + \ldots + s_n,$$
$$\Sigma_n = \text{Bruchteil von } S_n.$$

Wenn die Folge s_n die Eigenschaft besitzt, dass zu einer beliebig kleinen positiven δ sich zwei positive ganze Zahlen μ_1 und μ_2 angeben lassen derart, dass

$$0 \leqq \sigma_{\mu_1} \leqq \delta,$$
$$0 \leqq \sigma_\nu - \sigma_{\nu-1} \leqq \delta \qquad (\mu_1 < \nu \leqq \mu_2),$$
$$0 \leqq 1 - \sigma_{\mu_2} \leqq \delta,$$

so behaupten wir, dass die aus der Folge s_n abgeleitete Folge S_n ebenfalls diese Eigenschaft besitzt.

Laut Voraussetzung füllt die Folge σ_n das Intervall (0, 1) überall dicht aus, und zwar in einer spezifischen Weise. Das Lemma besagt, dass die Folge Σ_n das Intervall (0, 1) ebenfalls in dieser Art überall dicht ausfüllt.

Zum Beweise setzen wir $\delta = \frac{\varepsilon^2}{12}$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Also ist

$$0 \leqq \sigma_{\mu_1} \leqq \frac{\varepsilon^2}{12}, \tag{1}$$

$$0 \leqq \sigma_\nu - \sigma_{\nu-1} \leqq \frac{\varepsilon^2}{12} \qquad (\mu_1 < \nu \leqq \mu_2), \tag{2}$$

$$0 \leqq 1 - \sigma_{\mu_2} \leqq \frac{\varepsilon^2}{12}. \tag{3}$$

Nach (1), (2) und (3) können wir eine natürliche Zahl ν_1 wählen von der Beschaffenheit, dass

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqq \sigma_{\nu_1} \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{12}, \qquad \mu_1 < \nu_1 < \mu_2. \tag{4}$$

Wir bezeichnen nun den ganzen Teil von $\frac{6}{\varepsilon}$ (den grössten ganzen Zahl $\leqq \frac{6}{\varepsilon}\Big)$, wie üblich, mit $\left[\frac{6}{\varepsilon}\right]$ und setzen

$$\nu_2 = \nu_1 + \left[\frac{6}{\varepsilon}\right] \leqq \nu_1 + \frac{6}{\varepsilon} < \nu_1 + \frac{6}{\varepsilon^2} - 1. \tag{5}$$

Aus (2), (3) und (4) folgt durch Addition

$$1 \leqq (\mu_2 - \nu_1 + 1)\frac{\varepsilon^2}{12} + \frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$\nu_1 + \frac{6}{\varepsilon^2} - 1 \leqq \mu_2, \tag{6}$$

folglich weiter aus (5) und (6)

$$\nu_2 \leqq \mu_2. \tag{7}$$

Aus (2), (4) und (5) folgt noch weiter, dass

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqq \sigma_\nu \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{6}{\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{12} = \varepsilon \qquad (\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2), \tag{8}$$

$$\sigma_{\nu_1} + \sigma_{\nu_1+1} + \ldots + \sigma_{\nu_2} \geqq (\nu_2 - \nu_1 + 1)\frac{\varepsilon}{2} \geqq \frac{6}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{2} = 3 > 2. \tag{9}$$

Wir definieren Σ'_ν wie folgt:

$$\Sigma'_\nu = \Sigma_{\nu_1 - 1} + \sigma_{\nu_1} + \sigma_{\nu_1+1} + \ldots + \sigma_\nu \qquad (\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2)$$

und bezeichnen mit ν_3 die kleinste natürliche Zahl $\geqq \nu_1$ für welche $\Sigma'_{\nu_3} \geqq 1$ und mit ν_4 die grösste natürliche Zahl $\leqq \nu_2$ für welche $\Sigma'_\nu \leqq 2$. Diese Wahl von ν_3 und ν_4 ist nach (9) möglich.

Es ist nach (8), (9)

$$0 \leqq \Sigma'_{\nu_3} - 1 \leqq \varepsilon, \qquad 0 \leqq 2 - \Sigma'_{\nu_4} \leqq \varepsilon, \tag{10}$$

$$0 \leqq \Sigma'_\nu - \Sigma'_{\nu-1} = \sigma_\nu \leqq \varepsilon, \qquad (\nu_3 \leqq \nu \leqq \nu_4). \tag{11}$$

Weil aber laut Definition von Σ_n

$$\Sigma_\nu = \Sigma'_\nu - 1 \qquad (\nu_3 \leqq \nu \leqq \nu_4),$$

so schreiben sich (10), (11) in anderer Bezeichnung

$$0 \leqq \Sigma_{\nu_3} \leqq \varepsilon,$$
$$0 \leqq \Sigma_\nu - \Sigma_{\nu-1} \leqq \varepsilon \qquad (\nu_3 \leqq \nu \leqq \nu_4),$$
$$0 \leqq 1 - \Sigma_{\nu_4} \leqq \varepsilon.$$

Q. e. d.

(*Eingegangen am 1. Januar 1929.*)

Über die Abschätzung der Koeffizientensumme Dirichletscher Reihen.

Von László Kalmár in Szeged.

Einleitung.

Manche Fragestellungen der analytischen Zahlentheorie führen zur Aufgabe, die Koeffizientensumme[1])

$$A(x)=\sum_{n\leqq x} a_n$$

einer in der Halbebene $\sigma>1$ konvergenten Dirichletschen Reihe[2])

$$a(s)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{1}$$

mit von unten beschränkten Koeffizienten[3]) unter Anwendung gewisser Eigenschaften der Funktion $a(s)$ möglichst scharf abzuschätzen. Das vielleicht berühmteste Problem dieser Art ist die Abschätzung der Differenz

$$\pi(x)-\int_2^x \frac{du}{\log u} \tag{2}$$

wo $\pi(x)$, wie üblich, die Anzahl der die positive Zahl x nicht übersteigenden Primzahlen bezeichnet. Dieses Problem wurde von

---

1) Eine Summationsvorschrift dieser Art ist in dem Sinne zu verstehen, dass der Summationsindex alle positiven oder nichtnegativen ganze Zahlen durchläuft, welche die angegebene Bedingung erfüllen, je nach der Bezeichnung n oder m.

2) s bezeichnet eine komplexe Veränderliche, σ und t ihre reelle bzw. imaginäre Komponente, also $s=\sigma+ti$.

3) Vgl. Fussnote 20).

Herrn DE LA VALLÉE POUSSIN gelöst,[4]) und zwar mit dem Ergebnis[5])

(3) $$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}).$$

Er zeigte, dass die RIEMANNsche Zetafunktion, die bekanntlich für $\sigma > 1$ durch die DIRICHLETsche Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert wird, im Gebiete

(4) $$\sigma \geqq 1 - \frac{c_2}{\log \operatorname{Max}(c_3, |t|)}$$

(wo sie, wie in der ganzen Ebene überhaupt, mit Ausnahme des Pols erster Ordnung $s = 1$, regulär bleibt,) nicht verschwindet, und gleichzeitig, dass aus dieser Eigenschaft, unter Anwendung weiterer tiefen Eigenschaften der Zetafunktion und der HADAMARDschen Theorie der ganzen Funktionen, die Abschätzung (3) folgt. Erst Herr LANDAU zeigte,[6]) dass aus diesem DE LA VALLÉE POUSSINschen Satze

(5) $$\zeta(s) \neq 0 \text{ für } \sigma \geqq 1 - \frac{c_2}{\log \operatorname{Max}(c_3, |t|)}$$

die Abschätzung (3) auch ohne diesen tiefen Hilfsmittel, allein durch Anwendung einiger elementaren Abschätzungen der Zetafunktion und durch Heranziehung des CAUCHYschen Integralsatzes hergeleitet werden kann. Ich gebe nun eine Methode an (Satz I.), die bei derartigen Übergängen von den analytischen Eigenschaften der erzeugenden Funktion $a(s)$ zur Abschätzung der Koeffizientensumme $A(x)$, also auch von (5) zu (3), auch die Ersparung des

---

[4]) CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, Sur la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, *Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, **59** (1899—1900). No. 1., p. 1—74.

[5]) Es bezeichnen in der Folge $c_1, c_2, \ldots, c_{90}$ positive Zahlen, welche nur von den in der Klammer angegebenen Parametern abhängen; diejenige ohne Klammer also absolute Konstanten.

[6]) E. LANDAU, Neue Beiträge zur analytischen Zahlentheorie, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **27** (1909), S. 46—58., oder *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig und Berlin 1909), Kap. XVIII; S. 324—333. Vgl. noch E. LANDAU, Beiträge zur analytischen Zahlentheorie, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **26** (1908), S. 169—302., insbesondere S. 236—244.

CAUCHYschen Lehrsatzes ermöglicht und daher einen völlig elementaren Charakter hat.

Wäre die RIEMANNsche Vermutung

$$\zeta(s) \neq 0 \text{ für } \sigma > \frac{1}{2}$$

oder auch nur

(6) $$\zeta(s) \neq 0 \text{ für } \sigma > 1 - \varepsilon$$

mit einem $\varepsilon > 0$ bewiesen, wäre also die erzeugende Funktion des Primzahlproblems (nämlich $\log \zeta(s) - \int\limits_0^\infty (\zeta(s+u) - 1)\,du$ oder $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)$) über die Gerade $\sigma = 1$ hinaus in einen ganzen Streifen $1 - \varepsilon < \sigma \leqq 1$ analytisch fortsetzbar, so würde[7]) mit wesentlicher Ausnützung der Tatsache, dass dann diese erzeugende Funktion für $\sigma > 1 - \varepsilon$ von endlichen Grössenordnung d. h. $O(|t|^{c_1})$ ist, die Abschätzung

$$\pi(x) = \int\limits_2^x \frac{du}{\log u} + O(x^\vartheta)$$

mit einem $\vartheta < 1$ folgen. Da man aber (6) zurzeit mit keinem $\varepsilon > 0$ beweisen kann, so muss man sich mit Abschätzungen von der Form

$$\pi(x) = \int\limits_2^x \frac{du}{\log u} + O(F(x))$$

begnügen, wo, wie auch im Falle der Abschätzung (3), mit keinem $\vartheta < 1$ $F(x) = O(x^\vartheta)$ gilt. Man bedient sich zur Erreichung einer solchen Abschätzung einer Eigenschaft der Zetafunktion von geringerer Tragweite als (6) mit einem noch so kleinen $\varepsilon > 0$, sozusagen einer „Interpolation" zwischen der Konvergenz der erzeugenden DIRICHLETschen Reihe für $\sigma > 1$ einerseits und (6) andererseits; z. B. der Eigenschaft (5), d. h. der Fortsetzbarkeit der bezüglichen erzeugenden Funktion in das Gebiet (4). Nun ist es aber leicht zu zeigen, dass eine Abschätzung wie etwa

$$A(x) = O(xe^{-c_1\sqrt{\log x}})$$

gar nicht notwendig die analytische Fortsetzbarkeit der erzeugenden Funktion $a(s)$ jenseits der Geraden $\sigma = 1$ nach sich zieht (vgl.

---

[7]) E. LANDAU, Neue Beiträge usw. a. a. O. [6]), S. 53—58., oder *Handbuch* usw. a. a. O. [6]), Kap. XXI; S. 378—388. Vgl. noch H. VON KOCH, Sur la distribution des nombres premiers, *Acta Mathematica*, 24 (1901), p. 159—182.

Satz II.). Mit der elementaren Charakter meiner Methode hängt es nun zusammen, dass sie auch im Falle einer nichtfortsetzbaren erzeugenden Funktion[8]) anwendbar ist; dieselbe liefert sogar in einem sehr allgemeinen Falle eine bis auf den Wert einer gewissen Konstante *notwendige und hinreichende* Bedingung für die gültigkeit einer Abschätzung von gegebenen Form (vgl. Satz III.). Ich setze nämlich die Fortsetzbarkeit der Funktion $a(s)$ über das Konvergenzgebiet $\sigma > 1$ der Reihe (1) nicht voraus, sondern ich wähle eine andere „Interpolation" zwischen der Voraussetzung der blossen Konvergenz der Reihe (1) für $\sigma > 1$ und der Voraussetzung der Analytizität und der endlichen Grössenordnung der Funktion $a(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1 - \varepsilon$. Diese letztere Voraussetzung lässt sich nämlich auch, wie folgt, formulieren: Es soll der Differentialoperator

$$e^{-\varepsilon \frac{d}{ds}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\varepsilon^m}{m!} \frac{d^m}{ds^m}$$

für die Funktion $a(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ sinnvoll sein, d. h. die Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\varepsilon^m}{m!} a^{(m)}(s) = e^{-\varepsilon \frac{d}{ds}} a(s)$$

soll für $\sigma > 1$ konvergieren und es soll dortselbst der Operatorwert die Ungleichung

$$|e^{-\varepsilon \frac{d}{ds}} a(s)| \leqq c_5 |s|^{c_4}$$

erfüllen. Meine Voraussetzung entsteht nun aus dieser letzteren dadurch, dass man den Differentialoperator $e^{-\varepsilon \frac{d}{ds}}$ durch einen „schwächeren", nämlich

$$P\left(-\frac{d}{ds}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m p_m \frac{d^m}{ds^m}$$

ersetzt, wo

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m$$

eine für jedes x konvergente Potenzreihe ist, welche für positives $x \to \infty$ langsamer wächst, als jede Potenz von e^x.

Durch Anwendung meines Satzes I. kann man, wie ich in **10.** zeigen werde, eine Abschätzung von (2) von der Form

[8]) Dass nichtfortsetzbare erzeugende Funktionen zur Herleitung asymptotischer Formeln verwendet werden können, zeigen die schönen Arbeiten von Hardy und Littlewood über additive Zahlentheorie.

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(xe^{-\sqrt[\alpha]{\log x}}\right) \tag{7}$$

(mit $\alpha = 14$)[9]) elementarer als bisher beweisen. Zum Beweise von (3) hat Herr DE LA VALLÉE POUSSIN, wie erwähnt, tiefe Hilfsmittel der Theorie der ganzen Funktionen herangezogen; aber auch der Beweis des Primzahlsatzes selbst:

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{du}{\log u} \tag{8}$$

ging bei ihm,[10]) und gleichzeitig bei Herrn HADAMARD[11]) nicht viel billiger. Erst Herr LANDAU war imstande,[12]) den Primzahlsatz und sogar auch eine Restabschätzung von der Form (7) (mit etwas, aber gewiss nicht bis zu 2 verkleinerbarem $\alpha = 13$) unter alleiniger Benützung klassischer funktionentheoretischen Methoden und einiger naheliegenden Eigenschaften der Zetafunktion zu beweisen. Später bewies er[13]) durch ebenfalls elementar-funtktionentheoretische Methoden auch (3), und sogar[14]) auch die noch schärfere LITTLEWOODsche[15]) Abschätzung

---

[9]) Über die Verkeinerung des Wurzelexponenten gilt hier genau dasselbe, wie für die zu erwähnende LANDAUsche Methode; siehe E. LANDAU, *Handbuch* usw. a. a. O. [6]). § 65.; S. 242—258.

[10]) CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, première partie, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, **20**, 2e Partie (1896), p. 183—256.

[11]) J. HADAMARD, Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 24 (1896), p. 199—220.

[12]) E. LANDAU, Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes, *Matematische Annalen*, **56** (1903), S. 645—670., oder *Handbuch* usw. a. a. O. [6]), Kap. XI und XII; S. 151—197.

[13]) Es kommt, gemäss den oben gesagten, auf einem elementar-funktionentheoretischen Beweis von (5) hinaus: E. LANDAU, Über die Wurzeln der Zetafunktion, *Mathematische Zeitschrift*, **20** (1924), S. 98—104., insbesondere § 4., oder *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig 1927), Bd. 2., S. 9—27., wo eine Verallgemeinerung von (3) (für die Primzahlen einer arithmetischen Progression) mit denselben Methoden bewiesen ist.

[14]) E. LANDAU, Über die ζ-Funktion und die L-Funktion, *Mathematische Zeitschrift*, **20** (1924), S. 105—125., oder (allgemeiner) *Vorlesungen* usw. a. a. O. [13]), Bd. 2., S. 31—47.

[15]) J. E. LITTLEWOOD, Researches in the Theory of the RIEMANN ζ-Function, *Proceedings of the London Mathematical Society*, II. **20** (1922), Records of proceedings at meetings p. XXII—XXVIII, insbesondere p. XXV, wo die wesentlichste analytische Hilfsmittel dieser Abschätzung ohne Beweis ausgesprochen ist.

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(xe^{-c_6\sqrt{\log x \log\log x}}\right).$$

Ausserdem hat Herr LANDAU den Beweis des Primzahlsatzes (8) in solchem Maasse vereinfacht,[16]) dass man selbst ohne Anwendung des CAUCHYschen Integralsatzes und sogar ohne den Begriff einer analytischen Funktion auskommt. Was aber die Restabschätzung betrifft, gelangt man auf seinem Wege gewiss nicht zu (7), dessen funktionentheoriefreien Beweis ich in **10.** kurz skizzieren werde.

I. Ein Satz über Dirichletschen Reihen.

1. Es sei dauernd

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m$$

eine nicht identisch verschwindende, für jedes x konvergente Potenzreihe mit nichtnegativen Koeffizienten, welche für positiv-reelles $x \to \infty$[17]) mit jedem positiven ε die Bedingung

$$P(x) = O(e^{\varepsilon x}) \tag{9}$$

erfüllt.

H i l f s s a t z I. *Ist*

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

eine für $\sigma > 1$ absolut konvergente DIRICHLET*sche Reihe, so ist der Differentialoperator*

$$P\left(-\frac{d}{ds}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m p_m \frac{d^m}{ds^m}$$

in der Halbebene $\sigma > 1$ für die Funktion $a(s)$ sinnvoll, d. h. die Reihe

$$P\left(-\frac{d}{ds}\right) a(s) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m p_m a^{(m)}(s)$$

ist für $\sigma > 1$ konvergent; ferner wird der Operatorwert, d. h. die

[16]) E. LANDAU, Über die Bedeutung einigen neuen Grenzwertsätze der Herren HARDY und AXER, *Prace Matematyczno-Fizycznych*, 21 (1910), S. 97—177., insbesondere Satz XVIII; und Sobre los números primos en progresión aritmética, *Revista Matemática Hispano-Americana*, 4 (1923), 56 S.

[17]) Die Abschätzungen und asymptotische Formeln sind im Folgenden, wenn nicht anders angegeben wird, für positiv-reelles $x \to \infty$ zu verstehen.

Summe der obigen Reihe für $\sigma > 1$ durch die DIRICHLET*sche Reihe*

$$P\left(-\frac{d}{ds}\right) a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n P(\log n)}{n^s}$$

dargestellt.

Beweis. Die Doppelreihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n p_m \log^m n}{n^s} \tag{10}$$

ist für $\sigma > 1$ absolut konvergent, da

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n p_m \log^m n}{n^s} \right| = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| p_m \log^m n}{|n^\sigma}$$

in der Anordnung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} \sum_{m=0}^{\infty} p_m \log^m n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| P(\log n)}{n^\sigma}$$

wegen

$$\frac{|a_n| P(\log n)}{n^\sigma} = O\left(\frac{|a_n| e^{1/2(\sigma-1)\log n}}{n^\sigma}\right) = O\left(\frac{|a_n|}{n^{1/2(\sigma+1)}}\right)$$

konvergiert. Also ist die Summe der Doppelreihe (10) jeder der beiden konvergenten Reihen

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log^m n}{n^s} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m p_m a^{(m)}(s),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \sum_{m=0}^{\infty} p_m \log^m n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n P(\log n)}{n^s}$$

gleich.

Hilfssatz II. *Die* DIRICHLET*sche Reihe*

$$b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

sei in der Halbebene $\sigma > 1$ absolut[18]) *konvergent und erfülle dortselbst eine Ungleichung*

$$|b(s)| \leq c_7 |s|^\varkappa \qquad (\varkappa > 0). \tag{11}$$

Dann ist für ganzes $K > \varkappa$

$$\sum_{n \leq x} b_n \log^K \frac{x}{n} = O(x).$$

Beweis. Bekanntlich[19]) gilt für jedes $\eta > 0$

[18]) Die absolute Konvergenz ist zwar gar nicht notwendig, es genügt aber für meine Zwecke, allein diesen Fall zu betrachten.

[19]) Vgl. z. B. E. LANDAU, *Handbuch* usw. a. a. O. [6]), S. 268.

$$\sum_{n\leq x} b_n \log^K \frac{x}{n} = \frac{K!}{2\pi i} \int\limits_{1+\eta-\infty i}^{1+\eta+\infty i} \frac{x^s}{s^{K+1}} b(s)\, ds, \tag{12}$$

daher ist wegen (11)

$$\left|\sum_{n\leq x} b_n \log^K \frac{x}{n}\right| \leq \frac{K!}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_7 x^{1+\eta}}{|1+\eta+ti|^{1+K-\varkappa}} dt \leq$$

$$\leq \frac{c_7 K!}{2\pi} x^{1+\eta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|1+ti|^{1+K-\varkappa}};$$

hieraus folgt durch $\eta \to 0$

$$\left|\sum_{n\leq x} b_n \log^K \frac{x}{n}\right| \leq \frac{c_7 K!}{2\pi} x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|1+ti|^{1+K-\varkappa}}.$$

Hilfssatz III. *Es ist*

$$P(x+1) = O(P(x)),$$
$$P'(x) = O(P(x)).$$

Beweis. Wegen (9) ist speziell

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m \leq c_8 e^{1/_8 x}$$

für $x > 0$, also umsomehr

$$p_m \leq c_8 \frac{e^{1/_8 x}}{x^m} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Setzt man hier $x = 3m$, so folgt

$$p_m \leq c_8 \left(\frac{e}{3m}\right)^m \qquad (m > 0).$$

Daher ist für $x \geq 1$

$$P(x+1) = \sum_{m \leq x+1} p_m (x+1)^m + \sum_{m > x+1} p_m (x+1)^m \leq$$

$$\leq \sum_{m \leq x+1} p_m x^m \left(1 + \frac{1}{x}\right)^m + \sum_{m > x+1} c_8 \left(\frac{e}{3} \frac{x+1}{m}\right)^m \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} c_8 \left(\frac{e}{3}\right)^m \leq$$

$$\leq c_9 P(x) + c_{10} \leq c_{11} P(x),$$

und

$$P'(x) = \sum_{m \leqq x} m p_m x^{m-1} + \sum_{m > x} m p_m x^{m-1} \leqq$$

$$\leqq \sum_{m \leqq x} p_m x^m \frac{m}{x} + \sum_{m > x} c_8 m \left(\frac{e}{3}\frac{x}{m}\right)^m \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} c_8 m \left(\frac{e}{3}\right)^m \leqq$$

$$\leqq P(x) + c_{12} \leqq c_{13} P(x).$$

Hilfssatz IV. *Für $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ und ganzes $k \geqq 2$ ist*

$$0 \leqq (u+v)^k - u^k - k u^{k-1} v \leqq c_{14}(k) v^2 (u+v)^{k-2},$$

$$0 \leqq k(u+v)^{k-1} v - (u+v)^k + u^k \leqq c_{15}(k) v^2 (u+v)^{k-2}.$$

Beweis. Es ist

$$(u+v)^k - u^k - k u^{k-1} v = v^2 \sum_{r=0}^{k-2} \binom{k}{r+2} u^{k-2-r} v^r,$$

und

$$k(u+v)^{k-1} v - (u+v)^k + u^k = v^2 \sum_{r=0}^{k-2} \left(k\binom{k-1}{r+1} - \binom{k}{r+2}\right) u^{k-2-r} v^r =$$

$$= v^2 \sum_{r=0}^{k-2} (r+1) \binom{k}{r+2} u^{k-2-r} v^r.$$

Hilfssatz V. *Es sei $k > 0$ ganz, $Q(x)$ und $R(x)$ positive, nichtabnehmende Funktionen von x, welche*

(13) $$R(x) = o(Q(x))$$

und

(14) $$Q(2x) = O(Q(x)),\quad R(2x) = O(R(x))$$

genügen; ferner

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

eine Folge reeller Zahlen,

(15) $$b_n \geqq -Q(n) \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

und

(16) $$\sum_{n \leqq x} b_n \log^k \frac{x}{n} = O(xR(x)).$$

Dann ist

$$\sum_{n \leqq x} b_n \log^{k-1} \frac{x}{n} = O(x\sqrt{Q(x)R(x)}).$$

Beweis. Es sei $\lambda = \lambda(x)$ eine später zu bestimmende positive Funktion, welche für $x \to \infty$ gegen Null strebt. Dann ist wegen (16) und (14)

$$\sum_{n \leqq x+\lambda x} b_n \log^k \frac{x+\lambda x}{n} = O((x+\lambda x) R(x+\lambda x)) = O(x R(x)),$$

$$\sum_{n \leqq x-\lambda x} b_n \log^k \frac{x-\lambda x}{n} = O((x-\lambda x) R(x-\lambda x)) = O(x R(x));$$

daher gilt für $x > c_{16}$ $0 < \lambda \leqq \frac{1}{2}$ und

$$\sum_{n \leqq x+\lambda x} b_n \log^k \frac{x+\lambda x}{n} - \sum_{n \leqq x} b_n \log^k \frac{x}{n} \leqq c_{17} x R(x), \tag{17}$$

$$\sum_{n \leqq x-\lambda x} b_n \log^k \frac{x-\lambda x}{n} - \sum_{n \leqq x} b_n \log^k \frac{x}{n} \leqq c_{18} x R(x). \tag{18}$$

Ferner ist im Falle $k \geqq 2$ nach Hilfssatz IV. für $1 \leqq n \leqq x$

$$0 \leqq \log^k \frac{x+\lambda x}{n} - \log^k \frac{x}{n} - k \log (1+\lambda) \log^{k-1} \frac{x}{n} \leqq$$
$$\leqq c_{14}(k) \log^2 (1+\lambda) \log^{k-2} \frac{x+\lambda x}{n}$$

und für $1 \leqq n \leqq x - \lambda x$ $(x > c_{16})$

$$0 \leqq k \log \frac{1}{1-\lambda} \log^{k-1} \frac{x}{n} - \log^k \frac{x}{n} + \log^k \frac{x-\lambda x}{n} \leqq$$
$$\leqq c_{15}(k) \log^2 \frac{1}{1-\lambda} \log^{k-2} \frac{x}{n};$$

also, wegen (15),

$$-\sum_{n \leqq x} b_n \left(\log^k \frac{x+\lambda x}{n} - \log^k \frac{x}{n} - k \log (1+\lambda) \log^{k-1} \frac{x}{n} \right) \leqq$$
$$\leqq c_{14}(k) \log^2 (1+\lambda) \sum_{n \leqq x} Q(n) \log^{k-2} \frac{x+\lambda x}{n} \leqq$$
$$\leqq c_{14}(k) Q(x) \log^2 (1+\lambda) \sum_{n \leqq x+\lambda x} \log^{k-2} \frac{x+\lambda x}{n},$$

$$-\sum_{n \leqq x-\lambda x} b_n \left(k \log \frac{1}{1-\lambda} \log^{k-1} \frac{x}{n} - \log^k \frac{x}{n} + \log^k \frac{x-\lambda x}{n} \right) \leqq$$
$$\leqq c_{15}(k) \log^2 \frac{1}{1-\lambda} \sum_{n \leqq x-\lambda x} Q(n) \log^{k-2} \frac{x}{n} \leqq$$
$$\leqq c_{15}(k) Q(x) \log^2 \frac{1}{1-\lambda} \sum_{n \leqq x} \log^{k-2} \frac{x}{n}.$$

Hier ist

$$\sum_{n \leqq x} \log^{k-2} \frac{x}{n} \leqq \int_0^x \log^{k-2} \frac{x}{u}\, du = x \int_0^\infty v^{k-2} e^{-v}\, dv,$$

also auch

$$\sum_{n \leqq x+\lambda x} \log^{k-2} \frac{x+\lambda x}{n} \leqq (x+\lambda x) \int_0^\infty v^{k-1} e^{-v}\, dv.$$

Daher gilt für $k \geqq 2$, aber auch für $k=1$, da dann auf der linken Seite Null steht,

$$(19)\quad \begin{aligned} -\sum_{n \leqq x} b_n \log^k \frac{x+\lambda x}{n} + \sum_{n \leqq x} b_n \log^k \frac{x}{n} + k \log(1+\lambda) \sum_{n \leqq x} b_n \log^{k-1} \frac{x}{n} \leqq \\ \leqq c_{19}(k)\, x\, Q(x) \log^2(1+\lambda) \leqq c_{20}(k)\, \lambda x\, Q(x) \log(1+\lambda), \end{aligned}$$

$$(20)\quad \begin{aligned} -k \log \frac{1}{1-\lambda} \sum_{n \leqq x-\lambda x} b_n \log^{k-1} \frac{x}{n} + \\ + \sum_{n \leqq x-\lambda x} b_n \log^k \frac{x}{n} - \sum_{n \leqq x-\lambda x} b_n \log^k \frac{x-\lambda x}{n} \leqq \\ \leqq c_{21}(k)\, x\, Q(x) \log^2 \frac{1}{1-\lambda} \leqq c_{22}(k)\, \lambda x\, Q(x) \log \frac{1}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Endlich ist für $x > c_{16}$

$$(21)\quad \begin{aligned} -\sum_{x<n \leqq x+\lambda x} b_n \log^k \frac{x+\lambda x}{n} \leqq \sum_{x<n \leqq x+\lambda x} Q(n) \log^k \frac{x+\lambda x}{n} \leqq \\ \leqq \lambda x\, Q(x+\lambda x) \log^k (1+\lambda) \leqq c_{23}(k)\, \lambda x\, Q(x) \log(1+\lambda), \end{aligned}$$

und, da für $x-\lambda x < n \leqq x$

$$k \log^{k-1} \frac{x}{n} \log \frac{1}{1-\lambda} - \log^k \frac{x}{n} \geqq \log^{k-1} \frac{x}{n} \log \frac{x}{x-\lambda x} - \log^k \frac{x}{n} \geqq 0$$

ist,

$$\begin{aligned} -\sum_{x-\lambda x<n \leqq x} b_n \left(k \log^{k-1} \frac{x}{n} \log \frac{1}{1-\lambda} - \log^k \frac{x}{n} \right) \leqq \\ \leqq \sum_{x-\lambda x<n \leqq x} Q(n) \left(k \log^{k-1} \frac{x}{n} \log \frac{1}{1-\lambda} - \log^k \frac{x}{n} \right) \leqq \\ \leqq k \lambda x\, Q(x) \log^{k-1} \frac{x}{x-\lambda x} \log \frac{1}{1-\lambda}, \end{aligned}$$

d. h.

$$(22)\quad \begin{aligned} -k \log \frac{1}{1-\lambda} \sum_{x-\lambda x<n \leqq x} b_n \log^{k-1} \frac{x}{n} + \sum_{x-\lambda x<n \leqq x} b_n \log^k \frac{x}{n} \leqq \\ \leqq k \lambda x\, Q(x) \log^k \frac{1}{1-\lambda} \leqq c_{24}(k)\, \lambda x\, Q(x) \log \frac{1}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Aus (17), (19), (21) bzw. aus (18), (20), (22) folgt durch Addition für $x > c_{16}$

$$k \log(1+\lambda) \sum_{n \leqq x} b_n \log^{k-1} \frac{x}{n} \leqq c_{17} x R(x) + c_{25}(k) \lambda x Q(x) \log(1+\lambda)$$

bzw.

$$-k \log \frac{1}{1-\lambda} \sum_{n \leqq x} b_n \log^{k-1} \frac{x}{n} \leqq c_{18} x R(x) + c_{26}(k) \lambda x Q(x) \log \frac{1}{1-\lambda}.$$

Also ist wegen

$$\frac{1}{\log(1+\lambda)} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \frac{1}{\log \frac{1}{1-\lambda}} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\left| \sum_{n \leqq x} b_n \log^{k-1} \frac{x}{n} \right| \leqq c_{27} \frac{x}{\lambda} R(x) + c_{28}(k) \lambda x Q(x). \tag{23}$$

Wählt man, am günstigsten,

$$\lambda = \sqrt{\frac{R(x)}{Q(x)}}$$

(wegen (13) wird dann $\lambda \to 0$ erfüllt), so wird

$$\frac{x}{\lambda} R(x) = \lambda x Q(x) = x \sqrt{Q(x) R(x)},$$

und es ergibt sich aus (23)

$$\sum_{n \leqq x} b_n \log^{k-1} \frac{x}{n} = O(x \sqrt{Q(x) R(x)}).$$

2. Nun beweise ich den

Satz I. *Es sei die* Dirichlet*sche Reihe mit von unten beschränkten Koeffizienten*[20])

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{24}$$

[20]) Wörtlich ebenso kann man den allgemeineren Fall, wo statt dieser Voraussetzung

$$a_n \geqq -Q(n)$$

gilt, wo $Q(x)$ eine positive monoton nichtabnehmende Funktion von x mit der Eigenschaft

$$Q(2x) = O(Q(x))$$

bedeutet, behandeln; und zwar mit dem Ergebnis

$$A(x) = O\left(\frac{x\, Q(x)}{\{ P(c_{30} \log x)\, Q(x) \}^{2^{-[x+1]}}} \right)$$

statt (26).

in der Halbebene $\sigma > 1$ konvergent und erfülle dortselbst die Ungleichung

$$(25) \qquad \left| P\left(-\frac{d}{ds}\right) a(s) \right| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m p_m a^{(m)}(s) \right| \leq c_{29} |s|^{\varkappa} \qquad (\varkappa > 0),$$

wo

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m$$

eine sich nicht auf eine Konstante reduzierende[21] *Potenzreihe ist mit nichtnegativen Koeffizienten, welche für jedes x konvergiert und für reelles $x \to +\infty$ mit jedem positiven ε*

$$P(x) = O(e^{\varepsilon x})$$

erfüllt.

Dann gilt für die Koeffizientensumme der Reihe (24) *mit jedes $c_{30} < 1$ die Abschätzung*

$$(26) \qquad A(x) = \sum_{n \leq x} a_n = O\left(\frac{x}{\{P(c_{30} \log x)\}^{2^{-[\varkappa+1]}}} \right).$$

V o r b e m e r k u n g. Der Operatorwert

$$P\left(-\frac{d}{ds}\right) a(s) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m p_m a^{(m)}(s)$$

existiert für $\sigma > 1$ nach dem Hilfssatze I. und es ist

$$(27) \qquad P\left(-\frac{d}{ds}\right) a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n P(\log n)}{n^s},$$

da die Reihe (24) wegen

$$a_n \geqq -c_{31},$$

$$\left| \frac{a_n}{n^s} \right| = \frac{|(a_n + c_{31}) - c_{31}|}{n^\sigma} \leq \frac{|a_n + c_{31}| + |c_{31}|}{n^\sigma} = \frac{a_n}{n^\sigma} + \frac{2c_{31}}{n^\sigma}$$

in der Halbebene $\sigma > 1$ absolut konvergent ist.

B e w e i s. Nach dem Hilfssatze II., mit $b_n = a_n P(\log n)$, folgt aus (25) und (27)

$$\sum_{n \leq x} a_n P(\log n) \log^{[\varkappa+1]} \frac{x}{n} = O(x),$$

also, $K = [\varkappa + 1]$ gesetzt,

---

[21]) Es wäre leicht den Beweis so zu formulieren, dass auch der Fall, wo $P(x)$ eine von Null verschiedene Konstante (etwa 1) ist, nicht ausgeschlossen bleibt: Hilfssatz V. gilt nämlich (mit den alten Beweis, aber $\lambda = 1/2$) auch für $Q(x) = c_{31}$, $R(x) = 1$.

$$(28) \qquad \sum_{n\leq x} a_n P(\log n)\log^k \frac{x}{n} = O(x\{P(\log x)\}^{1-2^{k-K}})$$

mit $k=K$. Ist (28) mit irgendeinem ganzen $k\geq 1$ (aber $k\leq K$) schon bewiesen, so wenden wir den Hilfssatz V. mit diesem k, $Q(x)=c_{31}P(\log x)$, $R(x)=\{P(\log x)\}^{1-2^{k-K}}$ an. Dies ist möglich, da $b_n=a_nP(\log n)\geq -c_{31}P(\log n)$, ferner wegen $P(x)\to\infty$

$$R(x)=o(Q(x))$$

und endlich nach dem Hilfssatze III.

$$P(\log 2x)\leq P(\log x+1)=O(P(\log x)),$$

also

$$Q(2x)=O(Q(x)),\quad R(2x)=O(R(x))$$

ist. Es ergibt sich

$$\sum_{n\leq x} a_n P(\log n)\log^{k-1}\frac{x}{n}=O(x\{P(\log x)\}^{1-2^{k-1-K}}),$$

d. h. (28) mit $k-1$ statt k. Also ist (28) auch für $k=0$ gültig, d. h. es ist

$$S(x)=\sum_{n\leq x} a_n P(\log n)=O(x\{P(\log x)\}^{1-2^{-K}}).$$

Eine partielle Summation ergibt nun

$$A(x)=\sum_{n\leq x} a_n = a_1+\sum_{2\leq n\leq x}\frac{S(n)-S(n-1)}{P(\log n)}=$$

$$=a_1\left(1-\frac{1}{P(\log 2)}\right)+\sum_{2\leq n\leq x} S(n)\left(\frac{1}{P(\log n)}-\frac{1}{P(\log(n+1))}\right)+$$

$$+\frac{S(x)}{P(\log[x+1])}=$$

$$(29) \qquad =O\left(\frac{x}{\{P(\log x)\}^{2^{-K}}}\right)+$$

$$+O\sum_{2\leq n\leq x} n\{P(\log n)\}^{1-2^{-K}}\left(\frac{1}{P(\log n)}-\frac{1}{P(\log(n+1))}\right).$$

Hier ist

$$\sum_{2\leq n\leq x^{c_{30}}} n\{P(\log n)\}^{1-2^{-K}}\left(\frac{1}{P(\log n)}-\frac{1}{P(\log(n+1))}\right)\leq$$

$$\leq x^{c_{30}}\{P(c_{30}\log x)\}^{1-2^{-K}}\sum_{2\leq n\leq x^{c_{30}}}\left(\frac{1}{P(\log n)}-\frac{1}{P(\log(n+1))}\right)\leq$$

$$\leq\frac{x}{\{P(c_{30}\log x)\}^{2^{-K}}}\,\frac{P(\log x)}{x^{1-c_{30}}}\,\frac{1}{P(\log 2)}=O\left(\frac{x}{\{P(c_{30}\log x)\}^{2^{-K}}}\right),$$

und

$$\sum_{x^{c_{30}}<n\leqq x} n\{P\log n)\}^{1-2^{-K}}\left(\frac{1}{P(\log n)}-\frac{1}{P(\log(n+1))}\right)\leqq$$

$$\leqq x\sum_{x^{c_{30}}<n\leqq x}\{P(\log n)\}^{1-2^{-K}}\int\limits_{n}^{n+1}\frac{1}{\{P(\log u)\}^2}\frac{d}{du}\{P(\log u)\}\,du\leqq$$

$$\leqq x\int\limits_{x^{c_{30}}}^{\infty}\frac{1}{\{P(\log u)\}^{1+2^{-K}}}\frac{d}{du}\{P(\log u)\}\,du=\frac{2^K x}{\{P(c_{30}\log x)\}^{2^{-K}}};$$

also folgt (26) aus (29).

II. Umkehrbarkeitsbetrachtungen.

3. Der Satz I. liefert eine Methode, die Koeffizientensumme der Dirichletschen Reihe (24) als $O(F(x))$ abzuschätzen, wo $F(x)=o(x)$, aber bei keinem $\vartheta<1$ $F(x)=O(x^\vartheta)$ ist; und zwar unter Benützung ausschliesslich solcher Eigenschaften der Funktion $a(s)$, welche sich auf das Benehmen derselben in dem Konvergenzbereich $\sigma>1$ der Reihe (24) beziehen, aber nicht etwa analytische Fortsetzbarkeit von $a(s)$ jenseits der Geraden $\sigma=1$ fordern. Bevor ich die Notwendigkeit der Voraussetzungen des Satzes I. (wenigstens in einem wichtigen Speziellfalle und in einem gewissen Sinne) untersuche, zeige ich, dass für eine Abschätzung dieser Art sicher keine Fortsetzbarkeitsbedingung notwendig sein kann.

Satz II. *Es sei $F(x)$ eine für $x>1$ definierte positive nichtabnehmende Funktion von x, welche der Relation $F(x)=O(x)$, aber mit keinem $\vartheta<1$ einer Relation $F(x)=O(x^\vartheta)$ genügt. Dann gibt es eine in der Halbebene $\sigma>1$ konvergente* Dirichlet*sche Reihe*

(30) $$a(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

mit von unten beschränkten (sogar nichtnegativen) Koeffizienten, für deren Koeffizientensumme die Abschätzung

$$A(x)=\sum_{n\leqq x}a_n=O(F(x))$$

gilt, obwohl $a(s)$ in keinem Punkte des Geraden $\sigma=1$ regulär ist.

Beweis. Es sei die Folge

$$l_1,\ l_2,\ldots,l_\nu,\ldots$$

positiver ganzer Zahlen so gewählt, dass

$$l_1 = 1,$$

$$F(l_{\nu+1}) \geqq F(l_1) + F(l_2) + \ldots + F(l_\nu) \qquad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots$$

und

$$l_{\nu+1} \geqq \nu l_\nu$$

gelte. Das ist wegen $F(x) \to \infty$ möglich. Die DIRICHLETsche Reihe

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{F(l_\nu)}{l_\nu^s}$$

konvergiert sicher in keinem Punkte der Halbebene $\sigma > 1$, da dort nicht einmal das allgemeine Glied derselben gegen Null strebt. Es ist für $l_\mu \leqq x < l_{\mu+1}$

$$0 \leqq \sum_{n \leqq x} a_n = \sum_{\nu=1}^{\mu} F(l_\nu) \leqq 2F(l_\mu) \leqq 2F(x),$$

also

$$\sum_{n \leqq x} a_n = O(F(x)).$$

Wegen $F(x) = O(x)$ ist also die Reihe (3) für $\sigma > 1$ konvergent. Da für $\nu \to \infty$

$$\frac{l_{\nu+1}}{l_\nu} \to \infty$$

gilt, so existiert die Funktion $a(s)$ nach dem Lückensatze des Herrn WENNBERG[22]) nicht ausserhalb der Konvergenzhalbebene der Reihe (30).

4. Nun werde ich die Umkehrbarkeit des Satzes I. untersuchen. Ich lege gar kein Gewicht auf möglichst allgemeine Formulierung, daher beschränke ich mich auf den Speziellfall, dass es für die Funktion $P(x)$ eine Auschätzung

$$\{P(x)\}^4 = O(P(c_{32} x)) \tag{31}$$

gilt. Demgemäss betrachte ich eine DIRICHLETsche Reihe

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{32}$$

---

[22]) S. WENNBERG, *Zur Theorie der DIRICHLETschen Reihen* (Uppsala 1920); S. 1—7. Verallgemeinerungen wurden gegeben von F. CARLSON und E. LANDAU, Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des FABRYschen Lückensatzes, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, 1921, S. 184—188., sowie von O. SZÁSZ, Über Singularitäten von Potenzreihen und DIRICHLETschen Reihen am Rande des Konvergenzbereiches, *Mathematische Annalen*, **85** (1922), S. 99—110.

mit von unten beschränkten Koeffizienten, für deren Koeffizientensumme die Abschätzung

$$A(x) = \sum_{n \leqq x} a_n = O\left(\frac{x}{P(c_{33} \log x)}\right) \tag{33}$$

gilt (was im unseren Falle eine Konsequenz einer Abschätzung von der Form (26) ist). Dann ist die Reihe (32) für $\sigma > 1$ konvergent, und zwar (vgl. die Vorbemerkung des Satzes I.) absolut konvergent.

Es sei c_{34} eine später zu bestimmende positive Konstante. Nach dem Hilfssatze I. ist für $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} P\left(-c_{34}\frac{d}{ds}\right) a(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n P(c_{34} \log n)}{n^s} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (A(n) - A(n-1)) \frac{P(c_{34} \log n)}{n^s} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A(n) \left(\frac{P(c_{34} \log n)}{n^s} - \frac{P(c_{34} \log (n+1))}{(n+1)^s}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

Hier ist

$$\frac{P(c_{34} \log n)}{n^s} - \frac{P(c_{34} \log (n+1))}{(n+1)^s} = \int_n^{n+1} \frac{sP(c_{34} \log u) - c_{34} P'(c_{34} \log u)}{u^{s+1}} du,$$

also, da nach dem Hilfssatze III. für $u \geqq 2$

$$P'(c_{34} \log u) \leqq c_{35} P(c_{34} \log u)$$

gilt,

$$\begin{aligned} &\left|\frac{P(c_{34} \log n)}{n^s} - \frac{P(c_{34} \log (n+1))}{(n+1)^s}\right| \leqq \\ &\leqq (|s| + c_{34} c_{35}) \frac{P(c_{34} \log (n+1))}{n^{\sigma+1}} \leqq c_{36} |s| \frac{P(c_{34} \log (n+1))}{n^2} \end{aligned} \tag{35}$$

für $n \geqq 2$, aber, mit geeignetem c_{36}, offenbar auch für $n = 1$. Wird also die Konstante c_{34} so gewählt, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n)}{n^2} P(c_{34} \log (n+1))$$

konvergiere, so ist für $\sigma > 1$ wegen (34) und (35)

$$\left|P\left(-c_{34}\frac{d}{ds}\right) a(s)\right| \leqq c_{36} |s| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n)}{n^2} P(c_{34} \log (n+1)) = c_{37} |s|. \tag{36}$$

Eine solche Wahl von c_{34} ist aber, wenn $P(x)$ wieder keine Konstante ist, möglich. Denn es ist nach (33) und (31)

$$\frac{A(n)}{n^2} P(c_{31} \log (n+1)) = O\left(\frac{1}{n} \frac{P(c_{34} \log n+1)}{P(c_{33} \log n)}\right) =$$
$$= O\left(\frac{1}{n} \frac{P(c_{34} \log n)}{P(c_{33} \log n)}\right) =$$
$$= O\left(\frac{1}{n} \frac{1}{\{P(c_{34} \log n)\}^3} \frac{\{P(c_{34} \log n)\}^4}{P(c_{33} \log n)}\right) =$$
$$= O\left(\frac{1}{n \log^3 n} \frac{P(c_{32} c_{34} \log n)}{P(c_{33} \log n)}\right),$$

also im Falle $c_{34} = \frac{c_{33}}{c_{32}}$ gleich $O\left(\frac{1}{n \log^3 n}\right)$.

Da nach dem Satze I. auch umgekehrt aus (36) für jedes $c_{38} < c_{34}$ die Abschätzung

$$A(x) = O\left(\frac{x}{\{P(c_{38} \log x)\}^{1/4}}\right) =$$
$$= O\left(\frac{x}{P\left(\frac{c_{38}}{c_{32}} \log x\right)} \left\{\frac{\left\{P\left(\frac{c_{38}}{c_{32}} \log x\right)\right\}^4}{P(c_{38} \log x)}\right\}^{1/4}\right) = O\left(\frac{x}{P\left(\frac{c_{38}}{c_{32}} \log x\right)}\right)$$

folgt, so gilt der

Satz III. *Es sei*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

eine von unten beschränkte Folge reeller Zahlen, ferner

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m$$

eine für jedes x *konvergente nichtkonstante,*

$$P(x) = O(e^{\varepsilon x})$$

für jedes $\varepsilon > 0$ *und*

$$\{P(x)\}^4 = O(P(c_{32} x))$$

erfüllende Potenzreihe mit nichtnegativen Koeffizienten.

Dann ist es, damit für irgendeine positive Konstante c_{39} *die Abschätzung*

$$A(x) = O\left(\frac{x}{P(c_{39} \log x)}\right)$$

gelte, notwendig und hinreichend, dass die Dirichlet*sche Reihe*

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

in der Halbebene $\sigma > 1$ *konvergiere und dortselbst mit geeigneten positiven Konstanten* c_{40} *und* c_{41} *die Ungleichung*

$$\left| P\left(-c_{40}\frac{d}{ds}\right) a(s) \right| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m c_{40}^m p_m a^{(m)}(s) \right| \leqq c_{41} |s|$$

erfülle.

Es gibt also nach dem Satze II. auch jenseits der Geraden $\sigma = 1$ nicht fortsetzbare Dirichletsche Reihen, welche eine solche Ungleichung erfüllen, d. h. diese Ungleichung verlangt weniger, als Fortsetzbarkeit der Funktion $a(s)$ über die Gerade $\sigma = 1$ hinaus; was man übrigens auch direkt zeigen kann.

III. Anwendungen.

5. Es sei dauernd, wie bisher,

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

eine für $\sigma > 1$ konvergente Dirichletsche Reihe mit von unten beschränkten Koeffizienten, ferner

$$A(x) = \sum_{n \leqq x} a_n$$

die Koeffizientensumme derselben.

Aus dem Satze I. folgt im Speziellfalle

$$P(x) = x^m$$

Satz IV. *Ist in der Halbebene* $\sigma > 1$

$$|a^{(m)}(s)| \leqq c_{42} |s|^{\varkappa} \qquad (m > 0,\ \varkappa > 0),$$

so gilt die Abschätzung

$$A(x) = O\left(\frac{x}{\log^{2-\frac{[\varkappa+1]}{m}} x}\right).$$

Corollar. *Ist in der Halbebene* $\sigma > 1$ *für jedes* $m > 0$ *mit demselben* $\varkappa > 0$

$$|a^{(m)}(s)| \leqq c_{43}(m) |s|^{\varkappa},$$

so gilt

$$A(x) = O\left(\frac{x}{\log^{\nu} x}\right) \text{ für jedes } \nu \gtreqless 0. \tag{37}$$

Der Satz III. ist zwar in diesem Falle nicht anwendbar, aber man kann doch, wie in **4.**, zeigen, dass dieses Corollar eine nicht nur hinreichende, sondern auch notwendige Bedingung für (37) liefert.

6. Als einen anderen Speziellfall betrachte ich

$$P(x)=E_\alpha(c_{44}x) \qquad (\alpha>1),$$

wo $E_\alpha(x)$ die MITTAG-LEFFLERsche Funktion

$$E_\alpha(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{\Gamma(\alpha m+1)} \tag{38}$$

bedeutet. Es gilt[23])

$$E_\alpha(x)\sim\frac{1}{\alpha}e^{\sqrt[\alpha]{x}}, \tag{39}$$

also

$$P(x)\sim\frac{1}{\alpha}e^{\sqrt[\alpha]{c_{44}x}}=O(e^{\varepsilon x})$$

für jedes $\varepsilon>0$; ferner

$$\{P(x)\}^4\sim\frac{1}{\alpha^4}e^{4\sqrt[\alpha]{c_{44}x}}=O(P(4^\alpha x)),$$

also folgt aus dem Satze I. und III. folgender

Satz V. *Genügt die Funktion $a(s)$ in der Halbebene $\sigma>1$ der Ungleichung*

$$\begin{aligned}&\left|E_\alpha\left(-c_{44}\frac{d}{dx}\right)a(s)\right|=\\ &=\left|\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{c_{44}^m}{\Gamma(\alpha m+1)}a^{(m)}(s)\right|\leq c_{45}|s|^\varkappa \qquad (\varkappa>0),\end{aligned} \tag{40}$$

so ist für jedes $c_{46}<2^{-[\varkappa+1]}\sqrt[\alpha]{c_{44}}$

$$A(x)=O(xe^{-c_{46}\sqrt[\alpha]{\log x}}). \tag{41}$$

Die Gültigkeit der Ungleichung (40) *mit gewissen c_{44}, c_{45} (und mit $\varkappa=1$) ist notwendig und hinreichend dafür, dass die Abschätzung* (41) *mit einem c_{46} gültig sei.*

7. Es sei die Funktion $a(s)$ in das Gebiet

$$\sigma>1-\frac{c_{47}}{\log^\beta \operatorname{Max}(c_{48},|t|)} \qquad (\beta>0,\ c_{48}>1) \tag{42}$$

---

[23]) G. MITTAG-LEFFLER, Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, cinquième note, *Acta Mathematica*, **29** (1905), p. 101—181., insbesondere p. 143., Formel (74). Kürzlich hat Herr LIPKA einen neuen Beweis für die asymptotische Entwicklung der Funktion $E_\alpha(x)$ durch eine allgemeine Methode des Herrn HAAR veröffentlicht: ST. LIPKA, Über asymptotische Entwicklungen der MITTAG-LEFFLERschen Funktion $E_\alpha(x)$, *diese Acta*, **3** (1927), S. 211—223.

analytisch fortsetzbar und genüge dort einer Ungleichung

(43) $$|a(s)| \leqq c_{49} \log^{c_{50}} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|).$$

Dann gilt für $\sigma > 1$ nach der CAUCHYschen Abschätzungsformel

(44) $$|a^{(m)}(s)| \leqq \frac{c_{49}\, m!}{c_{47}^{m}} \log^{c_{50}+\beta m} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Es ist, $m_0 = \left[\frac{1}{2\beta} + 1\right]$ gesetzt, für $m \geqq 2 m_0$,

$$\frac{m!\,\Gamma(\beta(m-m_0)+1)}{\Gamma((\beta+1)m+1)} \leqq \frac{m!\,\Gamma(\beta m + {}^1/_2)}{\Gamma((\beta+1)m+1)} \leqq$$

$$\leqq c_{51} \frac{m^{m+{}^1/_2} e^{-m} (\beta m - {}^1/_2)^{\beta m} e^{-\beta m + {}^1/_2}}{((\beta+1)\, m)^{(\beta+1)m+{}^1/_2} e^{-(\beta+1)m}} \leqq$$

$$\leqq c_{51} \sqrt{e}\, \frac{m^{m+{}^1/_2} (\beta m)^{\beta m}}{((\beta+1)\, m)^{(\beta+1)m+{}^1/_2}} \leqq c_{52}(\beta)\, \gamma^{m},$$

wo der Kürze halber

$$\gamma = \frac{\beta^{\beta}}{(\beta+1)^{\beta+1}}$$

gesetzt wurde; daher ist wegen (44) für $\sigma > 1$

$$\left| E_{\beta+1}\left(-c_{53} \frac{d}{dx}\right) a(s) \right| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{c_{53}^{m}}{\Gamma((\beta+1)m+1)} a^{(m)}(s) \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=0}^{2m_0-1} \frac{c_{53}^{m}}{\Gamma((\beta+1)m+1)} \frac{c_{49}\, m!}{c_{47}^{m}} \log^{c_{50}+\beta m} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|) +$$

$$+ \sum_{m'=m_0}^{\infty} c_{49} c_{52}(\beta) \left(\frac{c_{53}}{c_{47}} \gamma\right)^{m_0+m'} \frac{\log^{c_{50}+\beta(m_0+m')} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|)}{\Gamma(\beta m' + 1)} \leqq$$

$$\leqq c_{54}(\beta) \log^{c_{55}(\beta)} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|) +$$

$$+ c_{56}(\beta) \log^{c_{57}(\beta)} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|)\, E_{\beta}\left(\frac{c_{53}}{c_{47}} \gamma \log^{\beta} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|)\right) \leqq$$

$$\leqq c_{58}(\beta) \log^{c_{59}(\beta)} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|)\, e^{\sqrt[\beta]{\frac{c_{53}}{c_{47}}\gamma} \log \operatorname{Max}(c_{48}, |t|)} \leqq$$

$$\leqq c_{60}(\beta, \varkappa) \{\operatorname{Max}(c_{48}, |t|)\}^{\varkappa} \leqq c_{61}(\beta, \varkappa)\, |s|^{\varkappa}$$

wenn nur $\varkappa^{\beta} > \frac{c_{53}}{c_{47}} \gamma = \frac{c_{53}}{c_{47}} \frac{\beta^{\beta}}{(\beta+1)^{\beta+1}}$ ist. Ich wähle nun

$$c_{53} < c_{47} \frac{(\beta+1)^{\beta+1}}{\beta^{\beta}},$$

damit $\varkappa < 1$ gewählt werden kann; der Satz V. liefert dann die Abschätzung

$$A(x) = O\left(xe^{-c_{62}\sqrt[\beta+1]{\log x}}\right)$$

für jedes $c_{62} < {}^1/_2 \sqrt[\beta+1]{c_{53}}$. Also gilt der

Satz VI.[24]) *Ist die Funktion $a(s)$ für*

$$\sigma > 1 - \frac{c_{47}}{\log^\beta \operatorname{Max}(c_{48}, |t|)} \qquad (\beta > 0,\ c_{48} > 1)$$

regulär und erfüllt sie dort eine Ungleichung

$$|a(s)| \leqq c_{49} \cdot \log^{c_{50}} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|),$$

so ist für jedes $c_{62} < \frac{\beta+1}{2} \sqrt[\beta+1]{\frac{c_{47}}{\beta^\beta}}$

$$A(x) = O\left(xe^{-c_{62}\sqrt[\beta+1]{\log x}}\right). \tag{45}$$

8. Analog ergibt sich im Speziellfalle

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{63}^m \log 3 \log 4 \ldots \log(m+2)}{m!^2} x^m$$

der folgende

Satz VII. *Genügt die Funktion $a(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ der Ungleichung*

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{c_{63}^m \log 3 \log 4 \ldots \log(m+2)}{m!^2} a^{(m)}(s) \right| \leqq c_{64} |s|^\varkappa \tag{46}$$

$$(0 < \varkappa < 1),$$

oder aber ist dieselbe im Gebiete

$$\sigma \geqq 1 - c_{65} \frac{\log\log \operatorname{Max}(c_{66}, |t|)}{\log \operatorname{Max}(c_{66}, |t|)} \qquad (c_{66} > e)$$

regulär und erfüllt sie dortselbst eine Ungleichung

$$|a(s)| \leqq c_{67} \log^{c_{68}} \operatorname{Max}(c_{66}, |t|), \tag{47}$$

so ist für jedes $c_{69} < \sqrt{{}^1/_2\, c_{63}}$ *bzw.* $c_{69} < \sqrt{{}^1/_2\, c_{65}}$

$$A(x) = O\left(xe^{-c_{69}\sqrt{\log x \log\log x}}\right).$$

Man soll, um diesen Satz zu beweisen, die sich durch ganz grobe Abschätzung (Maximalglied statt Summe der Potenzreihe) sich ergebende Ungleichung

$$P(x) \geqq c_{70}(\varepsilon)\, e^{\sqrt{(2+\varepsilon)x\log x}}$$

(für jedes $\varepsilon > 0$ und $x \geqq 1$)

---

[24]) Vgl. E. Landau, *Handbuch* usw. a. a. O. [6]), § 242.; S. 877—879. (II. Band.)

und, beim Nachweise, dass aus der Regularitätsforderungen und aus der Ungleichung (47) die Ungleichung (46) folgt, die ebenfalls leicht beweisbare Abschätzung

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\log 3 \log 4 \ldots \log (m+2)}{m!} x^m\right| \leqq c_{71} x^2 e^{\nu}$$

$$\text{für } \nu \geqq 1 \text{ ganz}, \quad \frac{\nu}{\log(\nu+2)} \leqq x < \frac{\nu+1}{\log(\nu+3)}$$

anwenden.

9. Satz VI. und VII. haben unmittelbare Anwendungen auf die Primzahltheorie. Wie zuerst Herr DE LA VALLÈE POUSSIN,[25]) später aber viel einfacher Herr LANDAU[26]) bewiesen hat, ist die Funktion

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)-1}{n^s} = -\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right), \tag{48}$$

wo $\Lambda(n)$ die zahlentheoretische Funktion

$$\Lambda(n) = \log p \text{ für } n = p^k,\ p \text{ Primzahl},\ k \geqq 1,$$
$$\Lambda(n) = 0 \text{ sonst}^{27})$$

bezeichnet, in einem Gebiet

$$\sigma > 1 - \frac{c_{72}}{\log \operatorname{Max}(c_{73}, |t|)} \qquad (c_{73} > 1)$$

regulär und genügt dortselbst einer Ungleichung

$$|f(s)| \leqq c_{74} \log^{c_{75}} \operatorname{Max}(c_{73}, |t|). \tag{49}$$

Daher folgt aus dem Satze VI. die von Herrn DE LA VALLÉE POUSSIN durch Anwendung tiefer Eigenschaften der Zetafunktion, später von Herrn LANDAU ohne diese Hilfsmittel, aber mit Hilfe des CAUCHYschen Integralsatzes hergeleitete Abschätzung

$$\psi(x) = \sum_{n \leqq x} \Lambda(n) = x + O\left(x e^{-c_{76}\sqrt{\log x}}\right)$$

für jedes $c_{76} \leqq \sqrt{c_{72}}$, und daher der Primzahlsatz in der schärferen Fassung

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x e^{-c_{76}\sqrt{\log x}}\right)$$

ebenfalls für jedes $c_{76} < \sqrt{c_{72}}$.

---

[25]) A. a. O. [4]).

[26]) A. a. O. [13]).

[27]) Also für $n = 1$ und für jedes $n > 1$, welches durch zwei verschiedene Primzahlen teilbar ist.

Aus dem tieferen HARDY-LITTLEWOODschen Satze,[28]) nach welchem $f(s)$ sogar in einem Gebiet

$$\sigma \geqq 1 - c_{77} \frac{\log\log \operatorname{Max}(c_{78}, |t|)}{\log \operatorname{Max}(c_{78}, |t|)} \qquad (c_{78} > e)$$

regulär ist und einer Ungleichung von der Form (49) genügt, folgt ebenso nach dem Satze VII. die LITTLEWOODsche, zurzeit schärfeste Abschätzung der Primzahlmenge:

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x e^{-c_{79}\sqrt{\log x \log\log x}}\right)$$

für jedes $c_{79} < \sqrt{\tfrac{1}{2} c_{77}}$.

10. Der Umstand, dass Satz I. eine elementare Methode für den Übergang von den Eigenschaften der Funktion $a(s)$ zur Abschätzung der Koeffizientensumme $A(x)$ liefert, ermöglicht einen den Begriff der analytischen Funktion vermeidenden, also in einem gewissen Sinne elementaren Beweis der weniger scharfen Restabschätzung[29])

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x e^{-\sqrt[14]{\log x}}\right). \tag{50}$$

Der obige Beweis des Satzes VI. in der Formulierung, dass aus den Ungleichungen (44) die Abschätzung (45) folgt, lässt sich nämlich leicht in einen in diesem Sinne elementaren Beweis umformen. Denn der Begriff der Differentiation nach einer komplexen Variabeln tritt in den Vorangehenden nur scheinbar auf: ist

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

eine für $\sigma > 1$ konvergente DIRICHLETsche Reiche, so kann man für $m = 1, 2, \ldots$ die Funktion $a^{(m)}(s)$ ganz formal durch die bekanntlich ebenfalls für $\sigma > 1$ konvergente DIRICHLETsche Reihe

$$a^{(m)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m a_n \log^m n}{n^s} \tag{51}$$

erklären. Die Formel (12) kann man zur Vermeidung der komplexen Integration natürlich auch in der Form

$$\sum_{n \leqq x} b_n \log^K \frac{x}{n} = \frac{K!}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{1+\eta+ti}}{(1+\eta+ti)^{K+1}}\, b(1+\eta+ti)\, dt$$

---

[28]) A. o. O. [14]); siehe auch E. LANDAU, a. a. O. [13]).

[29]) Vgl. Fussnote [9]).

schreiben; dieselbe ist im hier in Betracht kommenden Falle $\varkappa < 1$, $K = 1$ bei LANDAU, Sobre los usw., a. a. O. [16]), Teorema 71 elementar bewiesen. Die asymptotische Formel (39) folgt für den Fall, dass α ganz ist, mit welchem man im Beweise von (49) auskommt, unmittelbar aus der Identität

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}(e^x + e^{\varrho x} + e^{\varrho^2 x} + \ldots + e^{\varrho^{\alpha-1} x}).$$

$$(\varrho = e^{\frac{2\pi i}{\alpha}}).$$

Ferner, und das ist die Hauptsache, man kann elementar beweisen, das die Funktion (48) für $\sigma > 1$ die Ungleichungen

$$(52) \quad |f^{(m)}(s)| \leqq c_{80}^{m+1}\, m!\, \log^{12(m+1)} \operatorname{Max}(3, |t|) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

erfüllt; daraus folgt dann nach dem Satze V., ebenso, wie in **7.**, die Abschätzung

$$\psi(x) = x + O(x e^{-c_{81} \sqrt[13]{\log x}}),$$

woraus sich (50) durch partielle Summation und ganz grobe Abschätzung ergibt.

Diesen elementaren Beweis der Ungleichungen werde ich hier kurz skizzieren. Man bedient sich zu diesem Zwecke der für $\sigma > 1$ sich durch die Anwendung der ersten Stufe der EULERschen Summenformel ergebenden Darstellung

$$(53) \quad \begin{aligned} (-1)^m \zeta^{(m)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^m n}{n^s} + \frac{m!}{\omega^{s-1}} \sum_{k=0}^{m} \frac{\log^k \omega}{k!} \frac{1}{(s-1)^{m-k+1}} + \\ + \int_\omega^\infty \frac{u - [u]}{u^{s+1}} (m \log^{m-1} u - s \log^m u)\, du \end{aligned}$$

$$(\omega > 0, \text{ ganz}).$$

Dieselbe liefert mit $\omega = 1$ für $m = 0, 1, 2, \ldots$ und[30]) $|s-1| \leqq 1/2$

$$(54) \qquad \left| \zeta^{(m)}(s) - \frac{(-1)^m m!}{(s-1)^{m+1}} \right| \leqq c_{82}\, m!,$$

also

$$(55) \qquad |m \zeta^{(m-1)}(s) + (s-1) \zeta^{(m)}(s)| \leqq c_{83}\, m!$$

und

$$(56) \qquad |(s-1)\zeta(s)| \geqq c_{84};$$

[30]) Natürlich ist stillschweigend immer auch $\sigma > 1$ vorausgesetzt.

ferner folgt aus (53) mit $\omega = \mathrm{Max}(3, [|t|])$ für[31]) $|s-1| > 1/2$

(57) $$|\zeta^{(m)}(s)| \leqq c_{85}^{m+1}\, m!\, \log^{m+1} \mathrm{Max}(3, |t|),$$

und, ebenso, wie bei LANDAU, Sobre los usw., a. a. O. [16]), Teorema 77.,

(58) $$|\zeta(s)| \geqq \frac{c_{86}}{\log^{10} \mathrm{Max}(3, |t|)}$$

wobei man die Tatsache ausnützt, (vgl. Teorema 65.), dass für $1 < \sigma_1 < \sigma_2$

$$\zeta(\sigma_2 + ti) - \zeta(\sigma_1 + ti) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \zeta'(\sigma + ti)\, d\sigma$$

ist (gliedweise Integration der gleichmässig Konvergenten DIRICHLETschen Reihe von $\zeta'(s)$).

Ferner beweist man die Identität

$$\zeta(s)\varphi(s) + \zeta'(s) = 0,$$

wobei

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = f(s) + \zeta(s)$$

ist, wie Herr LANDAU in Sobre los usw., a. a. O. [16]), Teorema 51. Daraus folgt, da sich die formalen Differentiationsregeln für Summe und Produkt[32]) von DIRICHLETschen Reihen aus der Erklärung (51) unmittelbar ergeben, die Identität

(59) $$\varphi^{(m)}(s)\zeta(s) + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \varphi^{(m-k)}(s)\zeta^{(k)}(s) + \zeta^{(m+1)}(s) = 0,$$

---

[31]) Es genügt nämlich allein den Fall $1 < \sigma < 2$ zu betrachten; für $\sigma \geqq 2$ folgt wegen

$$|\zeta^{(m)}(s)| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^m n}{n^2} = |\zeta^{(m)}(2)|$$

aus (53) mit $\omega = 1$ (57) und noch schärferes.

[32]) Es handelt sich durchweg um für $\sigma > 1$ absolut konvergente DIRICHLETschen Reihen; sind

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

solche, so ist es auch ihr Produkt

$$a(s)\, b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s},$$

wobei

$$c_k = \sum_{n n' = k} a_n b_{n'}$$

ist.

die man durch eine leichte Umformung auch in der Form

$$(60)\quad \begin{cases} \left(\varphi^{(m)}(s) - \dfrac{(-1)^m m!}{(s-1)^{m+1}}\right)(s-1)\zeta(s) + \\ + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \left(\varphi^{(m-k)}(s) - \dfrac{(-1)^{m-k}(m-k)!}{(s-1)^{m-k+1}}\right)(k\zeta^{(k-1)}(s) + (s-1)\zeta^{(k)}(s)) + \\ \qquad + ((m+1)\zeta^{(m)}(s) + (s-1)\zeta^{(m+1)}(s)) = 0 \end{cases}$$

schreiben kann. Aus (55), (56) und (60) folgt durch vollständige Induktion für $|s-1| \leqq 1/2$

$$\left|\varphi^{(m)}(s) - \frac{(-1)^m m!}{(s-1)^{m+1}}\right| \leqq c_{87}^{m+1} m!,$$

also wegen (54)

$$(61)\qquad |f^{(m)}(s)| \leqq c_{88}^{m+1} m!;$$

aus (57), (58) und (59) ebenso für $|s-1| > 1/2$

$$|\varphi^{(m)}(s)| \leqq c_{89}^{m+1} m! \log^{12(m+1)} \operatorname{Max}(3, |t|),$$

also wegen (57)

$$|f^{(m)}(s)| \leqq c_{90}^{m+1} m! \log^{12(m+1)} \operatorname{Max}(3, |t|)$$

für $|s-1| > 1/2$, aber, wegen (61), bei geeignetem c_{90} auch für $|s-1| \leqq 1/2$.

(*Eingegangen am 19. März 1929.*)

Sur la convergence en moyenne.

(Seconde communication.)

Par FRÉDÉRIC RIESZ à Szeged.

Dans une Note récente du même titre,[1]) j'ai démontré le théorème suivant: *Lorsque les fonctions $f_n(x)$ définies sur l'ensemble mesurable E et sommables ainsi que la p-ième puissance de leur module, convergent faiblement d'ordre p vers la fonction $f(x)$ et que, de plus,*

$$(1) \qquad \int_E |f_n|^p dx \to \int_E |f|^p dx,$$

alors la suite $\{f_n\}$ converge aussi en moyenne d'ordre p vers la même fonction f.[2])

Si je reviens aujourdhui sur ce sujet, c'est en premier lieu pour reconnaître la priorité de M. RADON qui a établi le même théorème, pour des fonctions $f(x)$ et $f_n(x)$ réelles, dans son important Mémoire de 1913 sur les fonctions additives d'ensembles;[3])

---

[1]) pp. 58—64 du présent volume.

[2]) La convergence *faible* d'ordre p des f_n vers f indique la relation

$$\int_E (f_n - f) g\, dx \to 0$$

pour toute fonction $g(x)$ sommable ainsi que $|g|^{p/p-1}$; la convergence *en moyenne* d'ordre p est définie par la relation

$$\int_E |f_n - f|^p dx \to 0.$$

[3]) J. RADON, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, *Sitzungsberichte Akad. Wiss., Wien,* **122** (1913), Abt. II a. pp. 1295—1438; cf. en particulier p. 1363. Il convient d'observer que les intégrales considérées par M. RADON appartiennent à un type plus général que celles de notre énoncé; ce sont des intégrales formées par rapport à une distribution de masses positives dans un espace d'un nombre quelconque de

malgré l'intérêt particulier que j'attachais à ce Mémoire dont le sujet était intimément lié à mes recherches antérieures, le théorème actuel parait avoir échappé à mon attention. Mais je profite aussi de l'occasion pour en donner une démonstration nouvelle, entièrement differente de celle que je viens de publier et aussi de celle de M. Radon, bien qu'elle me fusse suggérée par la lecture de cette dernière. Le seul point en commun avec M. Radon est ce que je pars des mêmes inégalités élémentaires dont M. Radon savait tirer parti pour établir le théorème par une analyse délicate;[4]) ce que je vais montrer c'est que le théorème est une conséquence presque immédiate de ces inégalités.

Supposons d'abord $p \geqq 2$; alors on a, pour toute valeur réelle de z,

(2) $$|1+z|^p \geqq 1+pz+A|z|^p,$$

où A est une certaine constante positive indépendante de z. En effet, envisageons le rapport

(3) $$\frac{|1+z|^p-1-pz}{|z|^p};$$

le dérivée seconde de l'expression figurant au numérateur, égale à $p(p-1)\,|1+z|^{p-2}$, est positive, ne s'annulant que pour $z=-1$; comme de plus, cette expression elle-même s'annule pour $z=0$ avec sa dérivée première, elle sera essentiellement positive pour $z \neq 0$. Pour $z=0$, le rapport (3) devient infini ou égal à 1 suivant que $p>2$ ou $p=2$; donc notre rapport sera essentiellement positif pour toute valeur finie de z; comme enfin, pour $|z|=\infty$, il tend vers une limite égale à 1, il s'ensuit qu'il admettra une valeur minimum A essentiellement positive, c. qu. f. d.

Dans l'inégalité que nous venons d'établir, remplaçons z par $\dfrac{f_n(x)-f(x)}{f(x)}$; en multipliant de plus par $|f|^p$ et en intégrant, il vient que

$$\int_E |f_n|^p dx \geqq \int_E |f|^p dx + p\int_E |f|^{p-2} f(f_n-f)\,dx + A\int_E |f_n-f|^p dx$$

dimensions. Le lecteur se rendra aisement compte du fait que la méthode exposée dans la présente communication ainsi que celle de ma première Note sur ce sujet, s'appliquent immédiatemant non seulement au cas des intégrales généralisées de M. Radon, mais aussi à toute opération linéaire positive portant sur des fonctions définies dans des ensembles abstraits.

[4]) l. c, p. 1358 et suiv.

et comme, par l'hypothèse de la convergence faible, la seconde des intégrales qui figurent au second membre tend vers 0 avec $1/n$ tandis que, par l'hypothèse (1), la première de ces intégrales est la limite de celle au premier membre, il s'ensuit que

$$\int_E |f_n - f|^p \, dx \to 0, \tag{4}$$

c'est à dire le théorème qu'il fallait démontrer.

Lorsque $1 < p < 2$, considérons, au lieu du rapport (3), la fonction donnée par cette même expression pour $|z| \geqq 1$ et par

$$\frac{|1+z|^p - 1 - pz}{z^2}$$

pour $|z| \leqq 1$. Pour $z = 0$, cette fonction a pour limite $\frac{1}{2}p(p-1)$ et comme elle est, tout comme au premier cas, essentiellement positive pour toute autre valeur finie ou infinie de z, elle admettra une valeur minimum $B > 0$. De là, en raisonnant tout comme au premier cas, on n'obtiendra pas immédiatement la relation (4) qu'il s'agit à démontrer, mais seulement la relation suivante:

$$\int_{E_n} |f_n - f|^p \, dx + \int_{E - E_n} (f_n - f)^2 |f|^{p-2} \, dx \to 0,$$

où nous avons désigné par E_n l'ensemble des valeurs x telles que $|f_n(x) - f(x)| \geqq |f(x)|$. Donc l'une et l'autre de ces deux intégrales tendent vers zéro. Pour en déduire la relation (4), il nous faudra montrer que la relation

$$\int_{E - E_n} (f_n - f)^2 |f|^{p-2} \, dx \to 0$$

entraine la relation

$$\int_{E - E_n} |f_n - f|^p \, dx \to 0.$$

Pour cela, nous n'aurons qu'à appliquer l'inégalité de Schwarz en tenant compte encore de l'inégalité $|f_n(x) - f(x)| < |f(x)|$ valable par hypothèse pour x appartenant à l'ensemble $E - E_n$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\int_{E - E_n} |f_n - f|^p \, dx &\leqq \int_{E - E_n} |f|^{p-1} |f_n - f| \, dx \leqq \\ &\leqq \left[\int_{E - E_n} |f|^p \, dx\right]^{1/2} \left[\int_{E - E_n} (f_n - f)^2 |f|^{p-2} dx\right]^{1/2} \leqq \\ &\leqq \left[\int_E |f|^p \, dx\right]^{1/2} \left[\int_{E - E_n} (f_n - f)^2 |f|^{p-2} dx\right]^{1/2} \to 0.\end{aligned}$$

Ainsi, le théorème est démontré aussi pour le cas où $p < 2$.

La démonstration que je viens d'esquisser ainsi que celle de M. Radon peuvent être aisement adaptées au cas plus général, envisagé dans ma première communication, où les fonctions $f(x)$ et $f_n(x)$ ne sont plus supposées de prendre exclusivement des valeurs réelles. Pour cet effet, on n'aura qu'à observer que le rapport

$$\frac{|1+z|^p - 1 - p\,\Re(z)}{|z|^2} \tag{5}$$

(où $\Re(z)$ indique la partie réelle de z), positif pour $z \neq 0$, admet, pour $|z| \to 0$, une limite inférieure essentiellement positife, savoir $\frac{1}{2}p$ lorsque $p \geqq 2$ et $\frac{1}{2}p(p-1)$ lorsque $1 < p \leqq 2$. Il s'ensuit que, pour $p \geqq 2$, le rapport

$$\frac{|1+z|^p - 1 - p\,\Re(z)}{|z|^p} \tag{6}$$

et, pour $1 < p < 2$, la fonction définie par (6) pour $|z| \geqq 1$ et par (5) pour $|z| \leqq 1$ admettent des minima essentiellement positifs. En remplaçant, dans les inégalités qui en ressortent, la variable z par $\dfrac{f_n(x) - f(x)}{f(x)}$, le raisonnement s'achèvera tout comme dans le cas réel.

(*Reçu le 20 avril 1929.*)

Remarques sur la Note de M. O. D. Kellogg intitulée „Some notes on the notion of capacity in potential theory“.[1])

Par Florin Vasilesco à Cambridge, Mass.

Je voudrais montrer par quelques remarques rapides quel est, à mon avis, le principal intérêt des importants résultats exposés par M. Kellogg dans la Note citée, et quelle est la place de ces resultats dans la théorie des points réguliers et irréguliers de la frontière des domaines les plus généraux.

On sait que c'est de la validité ou de la non-validité du théorème B) de la Note de M. Kellogg que dépend le sort de beaucoup et des plus beaux résultats qui ont été énoncés dans cette théorie. Je renvoie, pour le voir, à mon mémoire „Sur les singularités des fonctions harmoniques“ qui va paraître dans le *Journal des Mathématiques*.

D'autre part, le théorème A) que donne M. Kellogg et dont il démontre l'équivalence avec le théorème B) à l'aide de son beau théorème I, — dans l'énoncé duquel il faut cependant spécifier que „si T est infini, V doit avoir à l'infini une valeur inférieure à M,“ et de même, dans l'énoncé de A) que „les fonctions considérées sont nulles à l'infini si T est infini“[2]) — outre la contribution

---

[1]) *Voir ces Acta*, tome 4 (1928), p. 1—5.

[2]) Cela est nécessaire, en effet, pour conclure dans le cas du domaine infini, par les mots „Hence it is nowhere negative“, l. c., page 3. On le voit d'ailleurs par un exemple: soit $\nu(P)$ le potentiel de l'épine de M. Lebesgue, qui est un ensemble ayant un seul point irregulier. Prenons $V = -\nu(P)$; au point irrégulier de l'épine qui est sa pointe, $\nu(P)$ a une limite inférieure plus petite que 1, soit λ, et aux autres points de l'épine, tend vers 1. La fonction $V = -\nu(P)$ a donc sur l'épine la limite supérieure $M = -\lambda$, et l'ensemble e des points de l'épine où $\limsup V > M - \alpha$, pour $0 < \alpha < 1 - \lambda$ est constitué d'un seul point, donc est de *capicité nulle*.

L'adjonction dans l'énoncé du théorème A) est motivée par ce que la démonstration de son équivalence avec B) repose sur le théorème I.

possible qu'il apporte à la discussion de B), ramène, par contre, la question de l'*unicité des fonctions harmoniques* que M. Kellogg s'était posée depuis longtemps déjà, à la démonstration du théorème B).

Enfin, le théorème II, que donne M. Kellogg, résout complètement la question des „removable singularities", singularités artificielles dirions-nous.

Ce sont là, des résultats relatifs à des fonctions harmoniques *quelconques*, et *non plus seulement à celles qui sont solutions du probléme de* Dirichlet *généralisé,* que M. Kellogg obtient par l'emploi d'une fonction harmonique très particulière, *le potentiel,* qui est, je le rappelle, la solution du probléme de Dirichlet généralisé pour un domaine infini et des valeurs constantes égales à 1 sur sa frontière.

C'est là, à mon avis, la grande portée des résultats de M. Kellogg.

Dans mon mémoire cité, (*voir* § 26 et suivants) j'ai fait ressortir comment, pour l'étude à la frontière des fonctions harmoniques, solutions du problème de Dirichlet généralisé, la *considération du potentiel seul suffit* et *simplifie* en même temps l'étude. De beaux énoncés donnés par M. G. Bouligand de diverses manières[3]) ont pu être rattachés ainsi à la considération du seul potentiel, et leur validité ne dépend que de celle du théorème B).

J'ajoute que M. Kellogg a, dans une Note récente parue aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences,*[4]) démontré la validité du théorème B) pour le cas de l'espace à deux dimensions. De difficultés sérieuses s'opposent à la recherche de la validité de ce théorème dans les espaces à trois ou plus de dimensions. Ceci n'est plus surprenant maintenant, lorsqu'on a vu par les travaux de M. Kellogg et les miens, que ce théorème polarise autour de son existence incertaine pour les espaces à plus de deux dimensions, tant de résultats aléatoires sur les fonctions harmoniques.

Nous sommes ici, avec ce théorème, au coeur même de l'étude des fonctions harmoniques à la frontière de leur domaine d'existence.

(Reçu le 13 novembre 1928.)

---

[3]) *voir Annales de la Soc. Polonaise de Math.,* 3 (1925), p. 93. et autres.

[4]) séance du 24 Septembre 1928, p. 526.

Bibliographie.

P. Boutroux, Das Wissenschaftsideal der Mathematiker (Wissenschaft und Hypothese XXVIII), deutsch von H. Pollaczek-Geiringer, 253 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1927.

Das in deutscher Übersetzung vorliegende Werk des bekannten französischen Mathematikers wird ohne Zweifel für die Fachgenossen in verschiedener Hinsicht eine fesselnde Lektüre sein. In historischer Hinsicht ist es in vorzüglicher Weise geeignet insbesondere in den Geist der hellenistischen Mathematik einen Einblick zu gewähren; andererseits wird die Auffassung des Verfassers über Ziel und Methode der modernen Mathematik vom Interesse sein. Freilich ist diese Auffassung recht diskutabel; ob in der Tat das „Ziel ... ein widerstrebendes Objekt zu erfassen und zu zwingen" ist (S. 190). Ebenso wird die Sentenz: „daher wird man nicht danach streben ein schönes Werk zu gestalten" bei manchen Mathematikern Anstoss erregen. Die Verschiedenheit der Auffassung kann die Wertschätzung natürlich nicht beeinflussen; es handelt sich ja um ein Werk, das in erster Reihe anregend sein will, und dieses Ziel erreicht es in vollem Maasse.

A. H.

E. Hellinger und O. Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten (Sonderausgabe aus der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften), 282 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1928.

Abgesehen von mehr oder weniger wichtigen Einzelresultaten, die die Tragweite der heranreifenden Methoden noch nicht zu überblicken gestatteten, datiert die Theorie der Integralgleichungen und verwandter Probleme vom Anfang dieses Jahrhunderts; nach einem kolossalen Aufschwunge, nach Umwälzung und Umwertung mancher klassischen Teile der Analysis, zum Gemeingute geworden, ist sie schon vor mehr als einem Dezennium im Grossen und Ganzen zu einem gewissen Abschlusse gelangt; die reinen Mathematiker haben ihren Platz den angewandten abgetreten. Es hat längst die Stunde geschlagen, um nach rückwärts zu blicken, zu vergleichen und zu ordnen. Wir alle, die diese stürmische Entwicklung miterlebt haben, warteten mit Ungeduld auf eine durchgreifende Darstellung und speziell auf das seit langem angekündigte Referat, das jetzt nun vorliegt.

Das Buch entschädigt uns reichlich für die lange Wartezeit. Die beiden Verfasser, die selbst jene stürmische Zeit als tätige Forscher mitgemacht und besonders im Gebiete der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen Fundamentales geleistet hatten, haben nun auch die ganze Literatur gemeinsam durchgearbeitet, Resultate und Methoden verglichen, Zusammenhänge entdeckt, Fehlendes nachgeholt. Das Resultat dieser mühsamen Arbeit gliedern sie, nachdem sie das Bild der historischen Entwicklung in einem besonderen Kapitel entwerfen, dem algebraischen Gesichtspunkte entsprechend, in zwei Kapitel: Auflösungstheorie, Eigenwerttheorie. Innerhalb der Kapitel ist der Stoff derart angeordnet, dass der methodische Zusammenhang der beiden grossen, gewöhnlich getrennt behandelten Theorien, nämlich der Integralgleichungen und der Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, der sich keineswegs auf eine durch ein orthogonales Funktionensystem vermittelte Korrespondenz beschränkt, sich auch dem unbewandten Leser aufdränge. Vielleicht würde dieser Zusammenhang noch klarer einleuchten, wenn die umfassenden Begriffe der Funktionalanalysis, anstatt zuerst um die Mitte des Buches herum aufzutreten, vorausgeschickt worden wären und der Begriff der Funktionaltransformation etwas allgemeiner formuliert würde, so dass er auch die Substitutionen mit unendlich vielen Veränderlichen und auch Korrespondenzen zwischen heterogenen Dingen, wie Funktion und ihre FOURIERkoeffizienten, umfasse.

Es ist zu bedauern, dass, wahrscheinlich aus redaktionellen Gründen, die methodische Auswirkung auf die Nachbargebiete nur in einigen Zeilen angedeutet wird; einer der schönsten Belege dieser Auswirkung, der WEYLsche Beweis des Fundamentalsatzes über fastperiodische Funktionen, scheint schon nach Toresschluss gekommen zu sein. Doch sollen diese subjektiven Bemerkungen die Hochschätzung, die ich dem für Lernende und Forscher von nun an unentbehrlichen Werke entgegenbringe, keineswegs beeinträchtigen.

F. R.

Maurice Lecat, Coup d'oeil sur la Théorie des déterminants supérieurs dans son état actuel, avec une préface de M. A. BUHL, 98 + [100] pages, Bruxelles, Maurice Lamertin, 1927.

Les déterminants supérieurs dont l'idée date de CAYLEY et de SYLVESTER, sont des sommes algébriques formées des produits des éléments de matrices à plusieurs dimensions d'une manière analogue comme pour les déterminants ordinaires. La difficulté principale qu'il faut surmonter c'est la détermination des signes, pour lesquels il n'existe pas de convention immédiate comme dans le cas de deux dimensions, de sorte qu'il faudra envisager à la fois plusieurs conventions également autorisées, les déterminants qui en ressortent obéissant à des règles de calcul analogues à celles qu'on applique aux déterminants ordinaires.

M. LECAT prépare un traité en trois volumes embrassant tous les détails et les nombreuses applications de cette théorie qu'il a enrichié lui même; en attendant il en donne un aperçu sommaire dans le présent livre qui sera suivi d'un autre Coup d'oeil sur les applications à l'Algèbre et à la Géométrie.

L. Kalmár.

F. Klein, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, für den Druck neu bearbeitet von W. ROSEMANN (Grundlehren der math. Wissenschaften XXVI), XII + 326 S., Berlin, J. Springer, 1928.

Das Buch, eines der schönsten Schöpfungen KLEINS, ist der Weiterbildung der CAYLEYschen Untersuchungen gewidmet. Der KLEINsche projekivische Aufbau der nichteuklidischen Geometrie ist zweimal in autographierten Vorlesungsheften erschienen. Das vorliegende Buch entstand aus diesen teils durch Weglassung, teils durch Ergänzung zahlreicher Stellen. Der erste Teil enthält eine Einführung in die projektive Geometrie. Die Grundbegriffe der projektiven Geometrie, die Gebilde zweiten Grades, die Kollineationen die eine Gebilde zweiten Grades in sich überführen, werden hier recht ausführlich behandelt. Die eigentlichen, zum Gegenstand gehörenden Betrachtungen beginnen mit der Einordnung der euklidischen Metrik in das projektive System. Durch Übertragung der Begriffe *Entfernung* und *Winkel* auf das Imaginäre entstehen die wichtigen Begriffe der fundamentalen Gebilde: die imaginären Kreispunkte und der imaginäre Kugelkreis. Der sonst leicht irreführende Begriff der unendlich fernen Kreispunkte wird in einleuchtender Weise interpretiert. Mit Hilfe der Darstellung des euklidischen Winkels durch ein Doppelverhältnis wird es ermöglicht, durch eine Verallgemeinerung dieser Formeln den metrischen Begriffen der euklidischen Geometrie entsprechende Begriffe der nichteuklidischen Geometrie einzuführen. Zuerst wird die elliptische Geometrie als eine nichteuklidische Geometrie aus der euklidischen Geometrie des Raumes abgeleitet. Nach Einführung der allgemeinen projektiven Koordinaten werden die verschiedenen Massbestimmungen behandelt. Von diesen Massbestimmungen werden die elliptische, parabolische und hyperbolische ausgewählt, da nur diese in der Aussenwelt anwendbar sind, Dann folgt eine eingehende Untersuchung der beiden nichteuklidischen Geometrien. Dem Problem der Raumformen wird ein ganzes Kapitel gewidmet. Die axiomatische Begründung der hyperbolischen Geometrie und die differentialgeometrischen Gesichtspunkte werden nur in wenigen Seiten behandelt. In dem Schlusskapitel wird der Zusammenhang der nichteuklidischen Geometrie mit anderen Gebieten der Mathematik (Automorphe Funktionen. Uniformisierung, Relativitätstheorie) erörtert.

Den abstrakten logischen Untersuchungen gegenüber wird in dem Buch auf die anschauliche Seite der Geometrie ein ganz besonderer Wert gelegt, denn nach CLEBSCH „ist die Freude an der Gestalt in einem höheren Sinne, die den Geometer ausmacht". Der stufenweise Aufbau des Stoffes, welcher nur langsam vom Elementaren zum Höheren steigt, macht das Buch zu einer leichtverständlichen und genussreichen Lektüre.

St. Lipka.

D. Hilbert und W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik (Grundlehren der math. Wissenschaften XXVII), VIII + 120 S., Berlin, J. Springer, 1928.

Es ist häufig bemerkt worden, dass in unserer Zeit das Interesse für die *theoretische (mathematische) Logik* in mathematischen Kreisen eine immer mehr und mehr zunehmende Tendenz zeigt; besonders fördernd wirkte in dieser Hinsicht der Einfluss der radikal-intuizionistischen Kritik BROUWER's und die demgegenüberliegende HILBERTsche Neubegründung der Mathematik.

Die intuizionistische Kritik hat in der Forderung der Konstruierbarkeit aller Objekte, deren Existenz man behauptet, ein neues Kriterium für die

Wahrheit irgendeiner mathematischen Aussage angegeben, in Anbetracht dessen zweifellos das ganze Material der heutigen Mathematik zu prüfen ist, analog, wie nach CAUCHY's Kritik der Reihenlehre die unendliche Reihen auf Konvergenz zu prüfen waren. Bekanntlich gibt es gar manche wertvolle Gebiete der Mathematik, die diese schwere Probe nicht aushalten oder wenigstens scheint die intuizionistische Begründung derselben zunächst aussichtslos.

Vergleicht man aber die intuizionistische Kritik mit der Kritik der Reihenlehre, so entspricht der Summabilitätstheorie, auf Grund deren verschiedene Behauptungen von LEIBNIZ, EULER u. A. über divergente Reihen in einem wohldefinierten Sinne sich dennoch als richtig herausgestellt haben, die HILBERTsche Beweistheorie. Diese, in den letzten 7 Jahren von HILBERT entwickelte und von seinen Schülern — darunter W. ACKERMANN — weitergeführte Theorie hat das Ziel, die klassische Mathematik von der vernichtenden Absicht der intuizionistischen Kritik zu retten. Dies geschieht dadurch, dass man zeigt, dass die ganze Mathematik auch bei Berücksichtigung der intuizionistischen Ansichten in einem wohldefinierten — wenn auch von der Bedeutung, die der Mathematik durch den Intuizionismus beigelegt wird, abweichenden — Sinne bestehen bleibt.

Eine übliche, dem axiomatischen Standpunkt entsprechende Auffassung der Mathematik ist die, dass eine Behauptung innerhalb einer, durch Axiome genau umschriebenen Theorie richtig ist, wenn dieselbe eine logische Folge der Axiomen ist. Mittels der theoretischen Logik kann diese Auffassung zu einer exakten — auch intuizionistisch betrachtet korrekten — Definition eines bestimmten Begriffes verschärft werden, welcher in der Beweistheorie als Wahrheitsbegriff zugrunde gelegt wird. Dass dieser Begriff von dem entsprechenden intuizionistischen Begriff verschieden ist, ist nicht vom Belang: die Hauptsache ist, dass derselbe, um die Analogie mit der Summabilitätstheorie weiterzuführen, durch die Epsilontik des Intuizionismus (d. h. ohne Gleichnis ausgedrückt: *finit*) definiert wurde. Natürlich ist es eine grosse Aufgabe der Beweistheorie, für jede einzelne betrachtete „Summationsmethode", d. h. für jedes einzelne betrachtete Axiomensystem zu prüfen, dass die wichtigsten Eigenschaften der „Konvergenz", d. h. der Wahrheit, auch bei dem neuen Begriffe erfüllt sind. Es handelt sich in erster Linie darum, dass von zwei einander widersprechenden Aussagen nicht beide wahr sein können, d. h. um die *Widerspruchslosigkeit* der zugrunde gelegten Axiomensystemen; ohne dieselbe steht nicht einmal fest, dass nicht etwa eine jede Behauptung als wahr erklärt wird.

Intuizionistische Forschung und Beweistheorie sind daher nicht Schöpfungen entgegengesetzter Weltanschauungen: sie ergänzen sich vielmehr. Beweisbarkeit und Nichtbeweisbarkeit eines Satzes stellen intuizionistische Wahrheiten dar; und umgekehrt, es wird die Bedeutung einer Konstruktion für ein Objekt, für welches bisher nur ein formaler Existenzbeweis vorhanden war, von niemandem abgesprochen. Die Beweistheorie benutzt die intuizionistische Arithmetik, gibt aber dafür „Sätze vom TAUBER—HARDYschen Typus" in grosser Anzahl, d. h. Sätze, durch welche in sehr allgemeinen Fällen aus der formalen Beweisbarkeit einer mathematischen Aussage ihre intuizionistische Richtigkeit gefolgert werden kann. Es kann sogar der Fall sein, dass bei einem gewissen Axiomensystem der Wahrheitsbegriff der Beweistheorie sich mit dem Wahrheitsbegriffe des Intuizionismus deckt. Die Frage, ob das bei einem gegebenen Axiomensystem der Fall ist, hängt eng mit der Möglichkeit eines *Entscheidungsverfahrens* zusammen, durch welche man jeden gegebenen Satz in diesem Axiomensystem entweder beweisen, oder widerlegen kann. HILBERT hat schon längst die von vielen angenommene, aber auch von vielen umschrittene Vermutung aufgestellt, dass es in der Mathematik kein Ignorabimus gibt. Auch dieses Problem lässt sich durch die HILBERTsche Beweistheorie exakt formulieren und angreifen.

Die Darstellung der Ergebnisse der Beweistheorie ist einem besonderen Werke von HILBERT und BERNAYS vorbehalten; das vorliegende Buch dient in erster Linie zur Vorbereitung dieses Werkes. Fragen, die sich auf ein spezielles mathematisches Axiomensystem beziehen, werden daher im vorliegenden Buche nicht behandelt, sondern es wird das Gebäude der theoretischen Logik in jener Form dargestellt, in welcher es in der Beweistheorie Anwendung findet. Zwei Kapitel behandeln die Arithmetik der theoretischen Logik: den *Aussagenkalkül* und seine Umdeutung als *Prädikaten-* und *Klassenkalkül;* dann folgt wieder in zwei Kapiteln die ausführliche Entwicklung des tiefsten Gebietes, der Funktionentheorie der theoretischen Logik: des *Funktionenkalküls* in engerer und weiterer Formulierung. Hier wird auf das höchste Problem der theoretischen Logik, auf das logische Entscheidungsproblem eingegangen, das die auf spezielle Axiomensysteme beziehende Entscheidungsprobleme als Spezialfälle enthält.

Das Buch ist übrigens auch unabhängig vom später zu erscheinenden HILBERT—BERNAYSschen Werke ein abgerundetes Ganzes; der erweiterte Funktionenkalkül, welcher, nach Beseitigung der logischen Paradoxien mittels der Typentheorie, zu einem anderen, WHITEHEAD—RUSSELLschen Aufbau der Mathematik führt (welche mit dem radikal-intuizionistischen Standpunkte überhaupt nicht vereinbar ist), wird eben wegen der Vollständigkeit behandelt, da die Beweistheorie ohne denselben auskommt. Vermöge der klaren Darstellung des Buches wird dasselbe gewiss das beliebteste Lehrbuch der theoretischen Logik.

Dem HILBERT—BERNAYSschen Werke sehen wir mit grosser Erwartung entgegen.

L. Kalmár.

Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen.

Von C. CARATHÉODORY in München.

Einleitung.

1. Die WEIERSTRASSsche und die ihr verwandte JACOBI-HAMILTONsche Theorie der Variationsrechnung haben sich in zwei extremen Fällen restlos bewährt: nämlich, wenn man ein *einfaches* Integral hat und n unabhängig zu variierende Funktionen, oder, wenn man ein μ-faches Integral hat und *eine einzige* zu variierende Funktion. Das allgemeine Problem dagegen von der Gestalt

$$(1.1) \quad \int \ldots \int f\left(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_\mu;\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial t_\mu}\right) dt_1 \ldots dt_\mu$$

ist eigentlich nie recht in Angriff genommen worden, wenn man von einigen kurzen Bemerkungen HADAMARD's absieht, der auf Eigentümlichkeiten dieses Problems aufmerksam gemacht hat.[1]) Auf den folgenden Seiten werden die ersten Vorarbeiten, die für die Behandlung dieses Problems mir unerlässlich erscheinen, ausführlich auseinandergesetzt. Meine diesbezüglichen Untersuchungen liegen schon viele Jahre zurück und sind auch teilweise publiziert.[2])

Beim Studium einer wichtigen Arbeit von HAAR über adjungierte Variationsprobleme[3]) habe ich nun bemerkt, dass meine

[1]) J. HADAMARD, Sur quelques questions de calcul des variations, *Bull. Soc. Math. de France,* 33 (1905), p. 73—80.

[2]) C. CARATHÉODORY, Über die kanonischen Veränderlichen in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale, *Math. Annalen,* 85 (1922), S. 78—88.; Über ein Reziprozitätsgesetz der verallgemeinerten LEGENDREschen Transformation, *Math. Annalen,* 86 (1922), S. 272—275.

[3]) A. HAAR, Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen, *Math. Annalen,* 100 (1928), S. 481—502.

alten Rechnungen durch eine geringfügige Modifikation in der Bezeichnung viel symmetrischer geschrieben werden können. Aus diesem Grunde wird das ganze Formelsystem noch einmal mitgeteilt. Das erste Kapitel, das der Ableitung rein formaler Identitäten gewidmet ist, enthält also lediglich die Resultate meiner früheren Arbeiten in neuer Fassung: durch die neue Bezeichnungsweise sowie auch durch einige Ratschläge, die mir Dr. T. Radó gegeben hat, hoffe ich aber, dass die Darstellung viel durchsichtiger geworden ist. Das zweite Kapitel ist der Weierstrassschen Theorie für das Problem (1. 1) gewidmet, die ich früher nur ganz unzulänglich gestreift hatte. Die diesem Probleme zugehörige E-Funktion wird hier zum ersten Male, sowohl in gewöhnlichen als auch in kanonischen Koordinaten aufgestellt Das Gleiche gilt von der Legendreschen Bedingung, sowie auch von den Differentialgleichungen, denen die „geodätischen Felder" genügen müssen. Endlich wird gezeigt, dass wenn ein geodätisches Feld eine Fläche transversal schneidet, diese notwendig eine Lösung der Euler-Lagrangeschen Gleichungen sein muss.

Das Problem dagegen, „ausgezeichnete" geodätische Felder zu konstruieren, d. h. solche, durch welche *vollständige Figuren* unserer Variationsproblems erzeugt werden, konnte noch nicht ausgeführt werden.

Kapitel I. Formale Identitäten.

2. Elementare Beispiele birationaler involutorischer Berührungstransformationen. Da im Folgenden eine Berührungstransformation uns beschäftigen wird, die birational und involutorisch ist, ist es von Interesse daran zu erinnern, dass auch andere Transformationen, die diese Eigenschaften besitzen, seit langem in der Variationsrechnung eine hervorragende Rolle gespielt haben:

Wir bezeichnen durch die Buchstaben

(2. 1) $$f,\ \varphi,\ p_i,\ \pi_i \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

eine Anzahl von Grössen, zwischen welchen (mit der jetzt üblichen Unterdrückung des Summenzeichens) die Relation

(2. 2) $$f+\varphi=p_i\pi_i$$

bestehen soll. Wir führen eine zweite Reihe von $2n+2$ Grössen, $F,\ \Phi,\ P_i,\ \Pi_i$ durch folgende Gleichungen ein:

(2. 3) $$F=\varphi,\quad \Phi=f,\quad P_i=\pi_i,\quad \Pi_i=p_i.$$

Diese Transformation ist nichts Anderes als die LEGENDRE*sche Transformation;* sie besitzt folgende Eigenschaften:

a) Sie ist *birational* und *involutorisch.* D. h. man löst die Gleichungen (2.3) nach den kleinen Buchstaben auf, indem man nämlich einfach die grossen mit den kleinen Buchstaben vertauscht. Dabei folgt aus (2.2) und (2.3), dass die Relation

$$F + \Phi = P_i \Pi_i \tag{2.4}$$

bestehen muss.

b) Sie ist eine *Berührungstransformation;* sind in der Tat f, φ, p_i, π_i Funktionen von irgend welchen Parametern, so besteht immer die Relation

$$dF - \Pi_i dP_i = -(df - \pi_i dp_i). \tag{2.5}$$

3. Die LEGENDREsche Transformation ist natürlich nicht die einzige Transformation, die die Eigenschaften *a)* und *b)* des § **2** besitzt. Eine ganz triviale Transformation, die dasselbe leistet, ist z. B. die folgende

$$F = -f,\ \Phi = -\varphi,\ P_i = -p_i,\ \Pi_i = \pi_i. \tag{3.1}$$

4. Als drittes Beispiel betrachten wir die *verallgemeinerte Inversion,* die durch folgende Relationen definiert wird:

$$F = \frac{1}{f},\quad \Phi = \frac{1}{\varphi},\quad P_i = \frac{p_i}{f},\quad \Pi_i = \frac{\pi_i}{\varphi}. \tag{4.1}$$

Die Transformation (4.1) ist offenbar involutorisch und birational; man verifiziert ausserdem, dass die Beziehung (2.4) eine Folge von (2.2) ist, sowie auch, dass eine Berührungstransformation vorliegt, mit Hilfe der sofort zu berechnenden Relationen

$$F + \Phi - P_i \Pi_i = \frac{1}{f\varphi}(f + \varphi - p_i \pi_i), \tag{4.2}$$

$$dF - \Pi_i dP_i = \frac{1}{f\varphi}(df - \pi_i dp_i). \tag{4.3}$$

Man bemerke übrigens, dass zur Aufstellung von (4.3) nicht nur (4.1) sondern auch (2.2) benutzt werden muss.

5. Die Transformation, die A. HAAR in seiner unter [3]) zitierten Arbeit benutzt hat, ist eine einfache Kombination der vorhergehenden, die man erhält, indem man setzt:

$$F = -\frac{1}{\varphi},\ \Phi = -\frac{1}{f},\ P_i = -\frac{\pi_i}{\varphi},\ \Pi_i = \frac{p_i}{f}. \tag{5.1}$$

6. Eine sehr interessante etwas kompliziertere birationale und involutorische Berührungstransformation hat T. Levi-Civita bei der Regularisation des Dreikörperproblems mit grossem Erfolg benutzt.[4]) Sie besteht im Folgenden: führt man die Bezeichnungen ein

$$a = p_i p_i, \quad b = p_i \pi_i, \quad c = \pi_i \pi_i, \tag{6. 1}$$

$$F = f, \quad \Phi = \varphi - 2b, \quad P_i = \frac{p_i}{a}, \quad \Pi_i = a\pi_i - 2bp_i, \tag{6. 2}$$

$$A = P_i P_i, \quad B = P_i \Pi_i, \quad C = \Pi_i \Pi_i, \tag{6. 3}$$

so erhält man nach ganz elementaren Rechnungen

$$Aa = 1, \quad B + b = 0, \quad AC = ac. \tag{6. 4}$$

Hieraus verifiziert man sehr leicht die Eigenschaften *a)* und *b)* des § **2**.

7. Die kanonischen Transformationen der Variationsrechnung. Der Hauptgegenstand unserer Untersuchung ist eine birationale, involutorische Berührungstransformation, die aus der Kombination der verallgemeinerten Inversion des § **4** mit der verallgemeinerten Legendreschen Transformation meiner alten Arbeit entsteht. Vor dieser letzteren besitzt sie den Vorteil, dass in allen Formeln die grossen mit den kleinen Buchstaben vertauscht werden können, dagegen hat sie den kleinen Nachteil, dass sie in den Grenzfällen ($n = 1$ oder $\mu = 1$) nicht in die gewöhnliche Legendresche sondern in diejenige Transformation übergeht, die Herr Haar benutzt hat.

Von jetzt ab werden wir neben den lateinischen Buchstaben $i, j, k, \ldots$, die von 1 bis n laufen sollen, auch griechische Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \varrho, \sigma \ldots$ benutzen, die von 1 bis μ zu nehmen sind. Z. B. stellt also das Symbol $p_{i\alpha}$ eine Matrix von n Zeilen und μ Kolonnen dar.

8. Wir betrachten die Veränderlichen

$$f, \varphi, p_{i\alpha}, \pi_{i\alpha}, \tag{8. 1}$$

zwischen welchen die Relation

$$f + \varphi = p_{i\alpha} \pi_{i\alpha} \tag{8. 2}$$

bestehen soll.

Ferner führen wir das Symbol

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} f - p_{i\alpha} \pi_{i\beta} \tag{8. 3}$$

ein, wobei $\delta_{\alpha\beta}$ wie üblich die Zahl Eins oder Null darstellen soll, je nachdem $\alpha = \beta$ oder $\alpha \neq \beta$ ist.

---

[4]) T. Levi-Civita, Sur la régularisation du problème des trois corps, *Acta Mathematica*, **42** (1920), p. 99–144.

Zur Abkürzung setzen wir die Determinante $|a_{\alpha\beta}|$ gleich a und bezeichnen mit $\bar{a}_{\alpha\beta}$ das algebraische Komplement von $a_{\alpha\beta}$ in dieser Determinante. Hiernach hat man also

(8. 4) $$a = |a_{\alpha\beta}|,$$

(8. 5) $$\delta_{\alpha\beta}\, a = a_{\alpha\varrho}\, \bar{a}_{\beta\varrho} = a_{\sigma\alpha}\, \bar{a}_{\sigma\beta}.$$

9. Jetzt führen wir eine neue Reihe von $2(n\mu+1)$ Veränderlichen

(9. 1) $$F,\ \Phi,\ P_{i\alpha},\ \Pi_{i\alpha}$$

ein, die durch folgende Gleichungen definiert werden:

(9. 2) $$\frac{F}{f} = \frac{\Phi}{\varphi} = \frac{f^{\mu-2}}{a},$$

(9. 3) $$P_{i\alpha} = \frac{1}{a}\, \pi_{i\varrho}\, \bar{a}_{\alpha\varrho},$$

(9. 4) $$\Pi_{i\alpha} = \frac{f^{\mu-2}}{a}\, p_{i\sigma}\, a_{\alpha\sigma}.$$

Es ist sehr bemerkenswert, dass man durch successives Auflösen linearer Gleichungssysteme, aus den Relationen (9. 2) bis (9 4) die ursprünglichen Veränderlichen (8. 1) als rationale Funktionen der Grössen (9. 1) darstellen kann.

10. Wir berechnen zuerst einige Identitäten, die aus den früheren Relationen folgen. Ersetzt man erstens in (9. 3) den Summationsbuchstaben α durch σ und faltet diese Gleichung mit $a_{\sigma\alpha}$, so folgt mit Berücksichtigung von (8. 5)

(10. 1) $$\pi_{i\alpha} = P_{i\sigma}\, a_{\sigma\alpha},$$

Ganz ähnlich erhält man aus (9. 4)

(10. 2) $$p_{i\alpha} = f^{2-\mu}\, \Pi_{i\varrho}\, \bar{a}_{\varrho\alpha}.$$

Drittens folgt aus (9. 3), wenn man (8. 3) berücksichtigt:

$$\begin{aligned} P_{i\alpha}\, p_{i\beta} &= \frac{1}{a}\, \pi_{i\varrho}\, p_{i\beta}\, \bar{a}_{\alpha\varrho} \\ &= \frac{1}{a}\, \bar{a}_{\alpha\varrho}(\delta_{\beta\varrho} f - a_{\beta\varrho}) \end{aligned}$$

und hieraus folgt nach (8. 5) und (9. 2)

(10. 3) $$\bar{a}_{\alpha\beta} = \frac{f^{\mu-2}}{F}(\delta_{\alpha\beta} + P_{i\alpha}\, p_{i\beta}).$$

Um endlich auch die letzte der hier in Betracht kommenden Relationen aufzustellen, bilden wir mit Hilfe von (9. 3) und (9. 4) die Gleichung:

$$P_{i\alpha}\Pi_{i\beta}=\frac{f^{\mu-2}}{a^2}\,\pi_{i\varrho}\,p_{i\sigma}\,\bar{a}_{\alpha\varrho}\,a_{\beta\sigma}.$$

Dann folgt aus (8. 3) und (8. 5)

$$P_{i\alpha}\Pi_{i\beta}=\frac{f^{\mu-2}}{a^2}\,(\delta_{\sigma\varrho}f-a_{\sigma\varrho})\,\bar{a}_{\alpha\varrho}\,a_{\beta\sigma}=\delta_{\alpha\beta}\frac{f^{\mu-1}}{a}-\frac{f^{\mu-2}}{a}\,a_{\beta\alpha},$$

oder nach (9. 2)

$$P_{i\alpha}\Pi_{i\beta}=\delta_{\alpha\beta}F-\frac{F}{f}\,a_{\beta\alpha}. \tag{10.4}$$

Die Relation (10. 4) kann auch nach (8. 3) symmetrischer geschrieben werden:

$$\frac{1}{F}\,P_{i\alpha}\Pi_{i\beta}=\frac{1}{f}\,p_{i\beta}\,\pi_{i\alpha}. \tag{10.5}$$

11. Aus (9. 2) und (8. 2) finden wir

$$F+\Phi=\frac{F}{f}\,(f+\varphi)=\frac{F}{f}\,p_{i\alpha}\,\pi_{i\alpha},$$

oder nach (10. 5)

$$F+\Phi=P_{i\alpha}\Pi_{i\alpha}. \tag{11.1}$$

12. Wir führen nun die zu (8. 3) analoge Bezeichnung ein

$$A_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}F-P_{i\alpha}\Pi_{i\beta}; \tag{12.1}$$

dann folgt aus (10. 4)

$$\frac{A_{\alpha\beta}}{F}=\frac{a_{\beta\alpha}}{f} \tag{12.2}$$

und hieraus, wenn man unsere früheren Bezeichnungen auch auf die grossen Buchstaben überträgt,

$$\frac{A}{F^{\mu}}=\frac{a}{f^{\mu}}, \tag{12.3}$$

$$\frac{\bar{A}_{\alpha\beta}}{F^{\mu-1}}=\frac{\bar{a}_{\beta\alpha}}{f^{\mu-1}} \tag{12.4}$$

Die Vergleichung von (9. 2) mit (12. 3) liefert jetzt

$$\frac{f}{F}=\frac{\varphi}{\Phi}=\frac{F^{\mu-2}}{A}. \tag{12.5}$$

Ferner folgt aus (10. 2), wenn man noch (12. 4) und hierauf (12. 5) benutzt,

$$p_{i\alpha}=\frac{1}{A}\,\Pi_{i\varrho}\,\bar{A}_{\alpha\varrho} \tag{12.6}$$

und ebenso erhält man aus (10. 1), (12. 2) und (12. 3)

$$\pi_{i\alpha} = \frac{F^{n-2}}{A} P_{i\sigma} A_{\alpha\sigma}. \tag{12. 7}$$

Vergleicht man nun (8. 2) mit (11. 1) und weiter (9. 2), (9. 3) und (9. 4) bzw. mit (12. 5), (12. 6) und (12. 7), so sieht man, dass man in diesen und folglich auch in allen übrigen Gleichungen die grossen Buchstaben mit den kleinen vertauschen kann.

Unsere Transformation ist daher *birational* und *involutorisch.*

13. Einführung von $f, F, p_{i\alpha}, P_{i\alpha}$ als Veränderliche. Wir haben bisher abwechselnd die Grössensysteme (8. 1) und (9. 1) unseren Rechnungen zu Grunde gelegt. Für viele Zwecke ist es bequemer, Formeln zu entwickeln, in welchen die Grössen

$$f,\ F,\ p_{i\alpha},\ P_{i\alpha} \tag{13. 1}$$

als Grundvariablen erscheinen.

Hierzu setzen wir

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + P_{i\alpha} p_{i\beta}, \tag{13. 2}$$

so dass nach (10. 3)

$$g_{\alpha\beta} = \frac{F}{f^{n-2}} \bar{a}_{\alpha\beta} \tag{13. 3}$$

ist. Um den Wert g der Determinante $|g_{\alpha\beta}|$ zu berechnen, bemerke man, dass $|\bar{a}_{\alpha\beta}| = a^{n-1}$ ist; dann folgt aus (13. 3) und (9. 2)

$$g = Ff \tag{13. 4}$$

und (13. 3) kann geschrieben werden

$$g_{\alpha\beta} = \frac{g}{f^{n-1}} \bar{a}_{\alpha\beta}. \tag{13. 5}$$

Aus dieser letzten Gleichung entnehmen wir

$$g_{\varrho\sigma} \bar{g}_{\varrho\beta} a_{\alpha\sigma} = \frac{g}{f^{n-1}} \bar{a}_{\varrho\sigma} \bar{g}_{\varrho\beta} a_{\alpha\sigma},$$

oder

$$a_{\alpha\beta} = \frac{a}{f^{n-1}} \bar{g}_{\alpha\beta}, \tag{13. 6}$$

also nach (9. 2)

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = F a_{\alpha\beta}. \tag{13. 7}$$

Wegen (10. 1) folgt nun

$$F \pi_{i\alpha} = P_{i\sigma} \bar{g}_{\sigma\alpha} \tag{13. 8}$$

und wegen (9. 4)

$$f\Pi_{i\alpha} = p_{i\sigma}\bar{g}_{\alpha\sigma}. \tag{13.9}$$

Endlich liefern die beiden letzten Relationen nach $p_{i\alpha}$ und $P_{i\alpha}$ aufgelöst, die Relationen

$$Fp_{i\alpha} = \Pi_{i\varrho}g_{\varrho\alpha}, \tag{13.10}$$

$$fP_{i\alpha} = \pi_{i\varrho}g_{\alpha\varrho}. \tag{13.11}$$

14. Die Eigenschaft der Berührungstransformation. Wir nehmen jetzt an, dass die von uns betrachteten Grössen von irgend welchen Parametern abhängen, und bilden das totale Differential von (13. 4) nach diesen Parametern. Wir erhalten auf diese Weise die Relation

$$F\,df + f\,dF = dg; \tag{14.1}$$

nun ist aber bekanntlich

$$dg = \bar{g}_{\alpha\beta}\,dg_{\alpha\beta}$$

und nach (13. 2)

$$dg_{\alpha\beta} = P_{i\alpha}\,dp_{i\beta} + p_{i\beta}\,dP_{i\alpha}.$$

Nach den beiden letzten Gleichungen ist also, wenn man (13. 8) und (13. 9) berücksichtigt,

$$dg = F\pi_{i\beta}\,dp_{i\beta} + f\Pi_{i\alpha}\,dP_{i\alpha}. \tag{14.2}$$

Die Vergleichung von (14. 2) mit (14. 1) führt schliesslich zu der Relation

$$F(df - \pi_{i\beta}\,dp_{i\beta}) + f(dF - \Pi_{i\alpha}\,dP_{i\alpha}) = 0, \tag{14.3}$$

aus welcher folgt, dass unsere Transformation eine *Berührungstransformation* ist.

15. Die Reziprozität. In einer früheren Arbeit[5]) habe ich die Bemerkung gemacht, die übrigens sofort bestätigt werden kann, dass die Determinante a, die wir im § 8 eingeführt haben, auch als $(\mu + n)$-reihige Determinante folgendermassen geschrieben werden kann:

$$a = \begin{vmatrix} \delta_{ij}, & \pi_{i\beta} \\ p_{j\alpha}, & \delta_{\alpha\beta}f \end{vmatrix}; \tag{15.1}$$

in dieser Formel sind die Zeilen mit i und α und die Kolonnen mit j und β bezeichnet. Genau ebenso sieht man, wenn man ein neues System von Veränderlichen durch die Gleichungen

$$b_{ij} = \delta_{ij}f - p_{i\varrho}\pi_{j\varrho} \tag{15.2}$$

[5]) vgl. das Zitat [2]).

einführt, dass die Determinante b der b_{ij} geschrieben werden kann

(15. 3) $$b = \begin{vmatrix} \delta_{ij} f, & \pi_{i\beta} \\ p_{j\alpha}, & \delta_{\alpha\beta} \end{vmatrix}.$$

Die Vergleichung von (15. 1) und (15. 3) führt zu der Relation

(15. 4) $$f^n a = f^\mu b,$$

aus der wir mit Hilfe von (9. 2) entnehmen

(15. 5) $$\frac{F}{f} = \frac{\Phi}{f} = \frac{f^{n-2}}{b}.$$

Ferner folgt aus (15. 2)

$$b_{si} P_{s\alpha} = f P_{i\alpha} - p_{s\varrho} \pi_{i\varrho} P_{s\alpha};$$

nach (13. 2) kann man dies schreiben

$$b_{si} P_{s\alpha} = f P_{i\alpha} - \pi_{i\varrho}(g_{\alpha\varrho} - \delta_{\alpha\varrho}),$$

oder mit Berücksichtigung von (13. 11)

(15. 6) $$\pi_{i\alpha} = b_{si} P_{s\alpha}.$$

Ähnlich entnehmen wir aus (15. 2)

$$\begin{aligned} b_{it} p_{t\alpha} &= f p_{i\alpha} - p_{i\varrho} \pi_{t\varrho} p_{t\alpha} \\ &= p_{i\varrho}(\delta_{\alpha\varrho} f - p_{t\alpha} \pi_{t\varrho}), \end{aligned}$$

oder nach (8. 5)

(15. 7) $$b_{it} p_{t\alpha} = p_{i\varrho} a_{\alpha\varrho}.$$

Nach (9. 4) erhält man also, wenn man noch (15. 4) beachtet,

(15. 8) $$\Pi_{i\alpha} = \frac{f^{n-2}}{b} p_{t\alpha} b_{it}.$$

Endlich folgt aus (15. 6) durch Auflösung

(15. 9) $$P_{i\alpha} = \frac{1}{b} \pi_{r\alpha} \overline{b}_{ir}.$$

16. Die Ähnlichkeit der Formeln (15. 2), (15. 5), (15. 9) und (15. 8) mit (8. 3), (9. 2), (9. 3) und (9. 4) zeigt, dass man in allen unseren Gleichungen die lateinischen Indizes mit den griechischen vertauschen kann, wenn man nur die $a_{\alpha\beta}$ durch die b_{ij} ersetzt.

17. Einführung der Parameter $S_{\alpha\beta}$, $S_{\alpha i}$ und $c_{\alpha\beta}$. Für die Behandlung unseres Variationsproblems ist es notwendig, neue Parameter einzuführen und ihre Verknüpfung mit den früheren Buchstaben zu untersuchen.

Wir betrachten zu diesem Zweck drei Matrizen

(17. 1) $$S_{\alpha\beta}, \ S_{\alpha i}, \ c_{\alpha\beta},$$

die mit den früheren Grössen durch die Relationen

(17 2) $$c_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + S_{\alpha i} p_{i\beta}$$

(17. 3) $$S_{\alpha i} = P_{i\varrho} S_{\alpha\varrho}$$

(17. 4) $$\frac{1}{F} = |S_{\alpha\beta}|$$

verbunden sein sollen.

Durch Einsetzen von (17. 3) in (17. 2) erhält man nun

$$\begin{aligned} c_{\alpha\beta} &= S_{\alpha\beta} + S_{\alpha\varrho} P_{i\varrho} p_{i\beta} \\ &= S_{\alpha\varrho} (\delta_{\varrho\beta} + P_{i\varrho} p_{i\beta}), \end{aligned}$$

oder nach (13. 2)

(17. 5) $$c_{\alpha\beta} = S_{\alpha\varrho} g_{\varrho\beta}.$$

Nach dem Multiplikationsgesetz der Determinanten folgt nun, wenn man (13. 4) beachtet, $c = Ff|S_{\alpha\beta}|$ oder nach (17. 4)

(17. 6) $$c = f.$$

Ferner entnimmt man aus (17. 5)

$$c_{\lambda\sigma} \bar{c}_{\lambda\beta} \bar{g}_{\alpha\sigma} = S_{\lambda\varrho} g_{\varrho\sigma} \bar{g}_{\alpha\sigma} \bar{c}_{\lambda\beta}$$

und hieraus folgt, nach (13. 4) und (17. 6),

(17. 7) $$\bar{g}_{\alpha\beta} = F S_{\lambda\alpha} \bar{c}_{\lambda\beta}.$$

Hieraus folgt, wegen (13. 8),

$$\pi_{i\alpha} = P_{i\sigma} S_{\lambda\sigma} \bar{c}_{\lambda\alpha},$$

oder nach (17. 3)

(17. 8) $$\pi_{i\alpha} = S_{\lambda i} \bar{c}_{\lambda\alpha}.$$

18. Wir wollen nun zeigen, dass, wenn man (17. 2) voraussetzt, die Gleichungen (17. 6) und (17. 8) den Gleichungen (17. 3) und (17. 4) äquivalent sind. Wir gehen also jetzt von den Gleichungen

(18. 1) $$c_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + S_{\alpha i} p_{i\beta},$$

(18. 2) $$\pi_{i\alpha} = S_{\varrho i} \bar{c}_{\varrho\alpha},$$

(18. 3) $$c = f$$

aus und wollen (17. 3) und (17. 4) ableiten. Erstens folgt aus (18. 2)

$$\pi_{i\sigma} c_{\alpha\sigma} = S_{\varrho i} \bar{c}_{\varrho\sigma} c_{\alpha\sigma},$$

also mit Berücksichtigung von (18. 3)

(18. 4) $$f S_{\alpha i} = \pi_{i\sigma} c_{\alpha\sigma}.$$

Dies, in (18. 1) eingesetzt, liefert

$$f c_{\alpha\beta} = f S_{\alpha\beta} + c_{\alpha\sigma} p_{i\beta} \pi_{i\sigma},$$

woraus nach (8.3) folgt

(18.5) $$f S_{\alpha\beta} = c_{\alpha\sigma} a_{\beta\sigma}.$$

Aus (18.5) folgt nun erstens

$$f P_{i\varrho} S_{\alpha\varrho} = c_{\alpha\sigma} P_{i\varrho} a_{\varrho\sigma}.$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung ist nach (10.1) gleich $c_{\alpha\sigma}\pi_{i\sigma}$ und mit Hilfe von (18.4) erhält man schliesslich

(18.6) $$S_{\alpha i} = P_{i\varrho} S_{\alpha\varrho},$$

d. h. die Relation (17.3), die wir beweisen wollten. Die Gleichung (17.4) ist ebenfalls eine Folge von (18.5), wenn man (18.3) und (9.2) beachtet; denn es ist

$$f^{\mu} |S_{\alpha\beta}| = a\, c = f \frac{f^{\mu-1}}{F},$$

oder

(18.7) $$F |S_{\alpha\beta}| = 1.$$

Kapitel II. Das Variationsproblem.

19. Definition der geodätischen Felder. Wir betrachten in einem $(n+\mu)$-dimensionalen Raum, dessen Koordinaten $(x_1 \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_\mu)$, oder, mit den früheren Bezeichnungen, (x_i, t_α) sein mögen, eine μ-parametrige Schar von n-dimensionalen Flächen. Eine derartige Schar kann durch μ Gleichungen der Form

(19.1) $$S_\alpha(x_i;\, t_\beta) = \lambda_\alpha$$

dargestellt werden. Durch die Gleichungen

(19.2) $$x_i = \xi_i(t_\alpha) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

werde ferner eine μ-dimensionale Mannigfaltigkeit definiert, die die Schar (19.1) schneidet. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn eine eineindeutige Abbildung eines Gebietes G_t des μ-dimensionalen Raumes der t_α auf ein Gebiet G_λ des μ-dimensionalen Parameterraumes der λ_α durch das Gleichungssystem

(19.3) $$S_\alpha(\xi_i(t_\gamma);\, t_\beta) = \lambda_\alpha$$

erzeugt wird. Hierzu muss aber insbesondere die Funktionaldeterminante

(19.4) $$\Delta = \left| \frac{\partial S_\alpha(\xi_i;\, t_\beta)}{\partial t_\beta} \right|$$

in G_t von Null verschieden sein.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$S_{\alpha i} = \frac{\partial S_\alpha}{\partial x_i}, \quad S_{\alpha\beta} = \frac{\partial S_\alpha}{\partial t_\beta}, \tag{19.5}$$

$$p_{i\alpha} = \frac{\partial \xi_i}{\partial t_\alpha}, \tag{19.6}$$

$$c_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + S_{\alpha i}\, p_{i\beta}, \tag{19.7}$$

so erscheint (19. 4) in der Gestalt

$$\Delta = |c_{\alpha\beta}| = c. \tag{19.8}$$

Wir bemerken noch, dass das Integral

$$\int_{G_t} \!\!\ldots\! \int \Delta\, dt_1 \ldots dt_\mu \tag{19.9}$$

den Inhalt des Gebietes G_λ des Parameterraumes darstellt, auf welches das Gebiet G_t durch die Relationen (19. 3) abgebildet worden ist.

Dieser Inhalt hängt aber nun von der Gestalt der Begrenzung von G_λ ab.

Wenn man also eine zweite μ-dimensionale Fläche

$$x_i = \overline{\xi}_i(t_\alpha) \tag{19.10}$$

betrachtet, und ein Gebiet $\overline{G}_t$, das durch diese neue Fläche auf *dasselbe* Gebiet G_λ, das wir soeben betrachtet haben, abgebildet wird, so wird das Integral

$$\int_{\overline{G}_t} \!\!\ldots\! \int \overline{\Delta}\, dt_1 \ldots dt_\mu, \tag{19.11}$$

das ganz analog wie (19. 9) gebildet werden soll, denselben Wert wie (19. 9) besitzen.

Wird insbesondere aus der Fläche (19. 2) durch den Rand des Gebietes G_t eine Mannigfaltigkeit ausgeschnitten, die auch auf (19. 10) liegt, so muss man die Integrale (19. 9) und (19. 11) für dasselbe Gebiet G_t berechnen, d. h. $\overline{G}_t = G_t$ setzen.

20. Die Koordinaten eines μ-dimensionalen Flächenelements des $(n+\mu)$ dimensionalen Raumes sollen jetzt durch die $n+\mu+n\mu$ Grössen

$$x_i, \; t_\alpha, \; p_{i\alpha} \tag{20.1}$$

dargestellt werden. Wir betrachen nun eine *positive* Funktion

$$f(x_i, \; t_\alpha, \; p_{i\alpha}) \tag{20.2}$$

dieser Grössen und bilden den Ausdruck

$$\frac{f(x_i, t_\alpha, p_{i\alpha})}{\Delta(x_i, t_\alpha, p_{i\alpha})} \tag{20.3}$$

in welchem Δ dieselbe Bedeutung, wie in (19.8) haben soll. Wir halten jetzt in (20.3) die (x_i, t_α) fest und suchen die $p_{i\alpha}$ so zu bestimmen, dass

$$\frac{f}{\Delta} = \text{Minimum} \tag{20.4}$$

sei; von einem Flächenelement (20.1) für welches die Bedingung (20.4) gilt, sagen wir, dass es durch die Flächenschar (19.1) *transversal* geschnitten wird.

Wir nehmen nun an, dass wir in einem gewissen $(n+\mu)$-dimensionalen Gebiete des Raumes der (x_i, t_α) Funktionen

$$p_{i\alpha} = p_{i\alpha}(x_j, t_\beta) \tag{20.5}$$

bestimmen konnten, die lauter Flächenelemente, die durch unsere Schar (19.1) transversal geschnitten werden, erzeugen.

Setzen wir nun die Werte (20.5) der $p_{i\alpha}$ in $f(x_i, t_\alpha, p_{i\alpha})$ und $\Delta(x_i, t_\alpha, p_{i\alpha})$ ein, und gilt in jedem Punkte des betrachteten Gebietes die Gleichung

$$f = \Delta, \tag{20.6}$$

so wollen wir sagen, dass die Schar (19.1) ein (zu f gehörendes) *geodätisches Feld* bildet. Eine notwendige Bedingung für das Bestehen von (20.4) wird durch die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial p_{i\alpha}}\left(\frac{f}{\Delta}\right) = 0$$

gegeben, die wegen (20.6) auch folgendermassen geschrieben werden können:

$$f_{p_{i\alpha}} = \frac{\partial \Delta}{\partial p_{i\alpha}}. \tag{20.7}$$

Die Gleichungen (20.6) und (20.7) bilden die Fundamentalrelationen, durch welche ein geodätisches Feld definiert wird.

21. Lösung des Variationsproblems. Hat man auf irgend eine Weise ein geodätisches Feld konstruiert, das überdies eine Mannigfaltigkeit (19.2) transversal schneidet, so bildet diese stets eine Lösung für das Variationsproblem, das zum Integrale

$$\int \ldots \int f(x_i, t_\alpha, p_{i\alpha})\, dt_1 \ldots dt_\mu \tag{21.1}$$

gehört. Wir betrachten nämlich ein Stück von (19.2), das sich auf ein Gebiet G_t des Raumes der t_α projiziert und ein entsprechendes Stück von (19. 10), das sich auf $\bar{G}_t$ projiziert, wobei die Beziehungen zwischen G_t und $\bar{G}_t$, die am Ende des § **19** erklärt wurden, gelten sollen. Dann ist nach den Resultaten des § **19** verbunden mit (20. 6)

$$\int\limits_{G_t} f\,dt_1 \ldots dt_\mu = \int\limits_{G_t} \Delta\,dt_1 \ldots dt_\mu = \int\limits_{\bar{G}_t} \bar{\Delta}\,dt_1 \ldots dt_\mu. \tag{21. 2}$$

Bezeichnet man also mit $\bar{f}$ den Wert von f auf der Fläche (19. 10), so ist nach (21. 2)

$$\int\limits_{\bar{G}_t} \bar{f}\,dt_1 \ldots dt_\mu - \int\limits_{G_t} f\,dt_1 \ldots dt_\mu = \int\limits_{\bar{G}_t} (\bar{f} - \bar{\Delta})\,dt_1 \ldots dt_\mu. \tag{21. 3}$$

Nun bemerke man, dass aus $f > 0$ und aus (20. 6) auch $\Delta > 0$ folgt. Für eine schwache Variation unseres ursprünglichen Flächenstückes ist daher auch $\bar{\Delta} > 0$. Hieraus folgt mit Berücksichtigung von (20. 4) und (20. 6)

$$\bar{f} - \bar{\Delta} = \bar{\Delta}\left(\frac{\bar{f}}{\bar{\Delta}} - \frac{f}{\Delta}\right) > 0, \tag{21. 4}$$

wodurch unsere Behauptung bewiesen wurde.

22. Einführung kanonischer Veränderlicher. Die weitere Behandlung unseres Problems wird ausserordentlich erleichtert, wenn wir jetzt die kanonischen Grössen F, $P_{i\alpha}$, $\Pi_{i\alpha}$ einführen, die wir im ersten Kapitel untersucht haben. In der Tat ist nach (19. 7) und (19. 8)

$$\frac{\partial \Delta}{\partial p_{i\alpha}} = S_{\lambda i} \bar{c}_{\lambda\alpha} \tag{22. 1}$$

und die Vergleichung dieser Formel mit (17. 8) und (20. 7) zeigt, dass wir

$$\pi_{i\alpha} = f_{p_{i\alpha}} \tag{22. 2}$$

zu setzen haben. Nach den §§ **8** und **9** kann man also jetzt durch rationale Operationen die $a_{\alpha\beta}$, F, Φ, $P_{i\alpha}$, $\Pi_{i\alpha}$ als Funktionen von x_i, t_α, $p_{i\alpha}$ berechnen. Ebenso kann man die Determinante a berechnen und insbesondere verifizieren, dass sie nicht verschwindet. Falls sie identisch verschwinden sollte, so wäre die Funktion f, von der unser Variationsproblem abhängt, für unsere Theorie nicht brauchbar.

Unser Zweck ist aber x_i, t_α, $P_{i\alpha}$ als unabhängige Veränderliche zu nehmen, und wir müssen daher die Bedingung aufstellen, die verifiziert sein muss, um die $p_{i\alpha}$ durch diese Grössen ausdrücken zu können. Hierzu benutzt man am besten (10. 1), eine Gleichung, die man nach (8. 3) folgendermassen ausführlich schreiben kann:

(22. 3) $$M_{i\alpha} = \pi_{i\alpha} - P_{i\sigma}(\delta_{\sigma\alpha} f - p_{k\sigma}\pi_{k\alpha}) = 0.$$

Dieses letzte Gleichungssystem soll also nach den $p_{i\alpha}$ auflösbar sein und wir müssen dazu schreiben, dass die Funktionaldeterminante

(22. 4) $$\left|\frac{\partial M_{i\alpha}}{\partial p_{j\beta}}\right| \neq 0$$

ist. Setzt man zur Abkürzung

(22. 5) $$\frac{\partial^2 f}{\partial p_{i\alpha}\partial p_{j\beta}} = \pi_{i\alpha, j\beta},$$

so folgt aus (22. 3)

(22. 6) $$\frac{\partial M_{i\alpha}}{\partial p_{j\beta}} = \pi_{i\alpha, j\beta} - P_{i\alpha}\pi_{j\beta} + P_{i\beta}\pi_{j\alpha} + P_{i\sigma}p_{k\sigma}\pi_{k\alpha, j\beta}.$$

Aus unseren Voraussetzungen folgt nun, dass $b \neq 0$ ist; daher kann man die Bedingung (22. 4) ersetzen durch die des Nichtverschwindens einer Determinante, deren Elemente

(22. 7) $$N_{i\alpha, j\beta} = b_{ri}\delta_{\sigma\alpha}\frac{\partial M_{r\sigma}}{\partial p_{j\beta}} = b_{ri}\frac{\partial M_{r\alpha}}{\partial p_{j\beta}}$$

sind. Aus (22. 6) und (22. 7) folgt nun mit Hilfe von (15. 6)

(22. 8) $$N_{i\alpha, j\beta} = b_{ri}\pi_{r\alpha, j\beta} - \pi_{i\alpha}\pi_{j\beta} + \pi_{i\beta}\pi_{j\alpha} + \pi_{i\sigma}p_{k\sigma}\pi_{k\alpha, j\beta};$$

da nun $b_{ri}\pi_{r\alpha, j\beta} = b_{ki}\pi_{k\alpha, j\beta}$ ist und da $b_{ki} + \pi_{i\sigma}p_{k\sigma} = \delta_{ik} f$ ist, kann man (22. 8) auch in der Form schreiben

(22. 9) $$N_{i\alpha, j\beta} = f\pi_{i\alpha, j\beta} - \pi_{i\alpha}\pi_{j\beta} + \pi_{i\beta}\pi_{j\alpha}.$$

Die Einführung der $P_{i\alpha}$ als unabhängige Veränderliche ist also stets möglich, falls die Determinante

(22. 10) $$\left| f\frac{\partial^2 f}{\partial p_{i\alpha}\partial p_{j\beta}} + \frac{\partial f}{\partial p_{i\beta}}\,\frac{\partial f}{\partial p_{j\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{i\alpha}}\,\frac{\partial f}{\partial p_{j\beta}} \right| \neq 0$$

ist.

23. Nachdem wir die $p_{i\alpha}$ als Funktionen von x_i, t_α, $P_{i\alpha}$ dargestellt haben, können wir nach dem Kapitel I. alle übrigen Grössen, also insbesondere F, Φ, $\Pi_{i\alpha}$ als Funktionen derselben Veränderlichen bestimmen.

Setzt man nun diese Funktionen in (14. 3) ein, so folgen sofort die Relationen

$$F f_{x_i} = -f F_{x_i}, \quad F f_{t_\alpha} = -f F_{t_\alpha}, \tag{23. 1}$$

$$\Pi_{i\alpha} = \frac{\partial F}{\partial P_{i\alpha}}, \tag{23. 2}$$

die wir später benutzen werden.

24. Die ***E*****-Funktion.** Wir sind jetzt in der Lage, für jedes geodätische Feld die WEIERSTRASSsche Exzessfunktion, die zum Integral (1. 1) gehört, zu berechnen.

Es sollen also die Gleichungen (20. 6) und (20. 7) gelten; berücksichtigt man aber (19. 8), (22. 2) und (22. 1), so sieht man, dass auch die Gleichungen (18. 2) und (18. 3) gelten müssen und diese sind nach dem § **18** äquivalent mit (17. 3) und (17. 4).

Setzen wir also in

$$\overline{\Delta} = |S_{\alpha\beta} + S_{\alpha i} \overline{p}_{i\beta}| \tag{24. 1}$$

für $S_{\alpha i}$ die rechte Seite von (17. 3) ein, so folgt nach dem Multiplikationsgesetz der Determinanten, wenn man (17. 4) beachtet,

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{F} |\delta_{\alpha\beta} + P_{i\alpha} \overline{p}_{i\beta}|. \tag{24. 2}$$

Nun definieren wir neue Grössen $h_{i\beta}$ durch die Gleichungen

$$\overline{p}_{i\beta} = p_{i\beta} + f \,.\, h_{i\beta} \tag{24. 3}$$

und erhalten aus (24. 2) mit Berücksichtigung von (13. 2)

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{F} |g_{\alpha\beta} + f P_{i\alpha} h_{i\beta}|. \tag{24. 4}$$

Bemerken wir nun, dass aus (13. 4) und (13. 8) folgt

$$(g_{\varrho\beta} + f P_{i\varrho} h_{i\beta}) g_{\varrho\alpha} = F f (\delta_{\alpha\beta} + \pi_{i\alpha} h_{i\beta}), \tag{24. 5}$$

so erhalten wir aus (24. 4)

$$\overline{\Delta} |\overline{g}_{\alpha\beta}| = F^{\mu-1} f^{\mu} |\delta_{\alpha\beta} + \pi_{i\alpha} h_{i\beta}|.$$

Da nun, wegen (13. 4), $|\overline{g}_{\alpha\beta}| = F^{\mu-1} f^{\mu-1}$ ist, erhält man schliesslich

$$\overline{\Delta} = f |\delta_{\alpha\beta} + \pi_{i\alpha} h_{i\beta}|. \tag{24. 6}$$

Wir berechnen nun $h_{i\beta}$ aus (24. 3) und bemerken, dass nach § **21**

$$E = \overline{f} - \overline{\Delta}$$

zu nehmen ist; man hat also schliesslich

$$\boxed{E = \overline{f} - \frac{1}{f^{\mu-1}} |\delta_{\alpha\beta} f + \pi_{i\alpha} (\overline{p}_{i\beta} - p_{i\beta})|.} \tag{24. 7}$$

Dies ist eine Formel, die für $\mu = 1$ in die übliche Gestalt der E-Funktion übergeht; es ist bemerkenswert, dass auch hier die E-Funktion nur von den Flächenelementen $p_{i\beta}$, $\overline{p}_{i\beta}$, nicht aber vom geodätischen Felde abhängt.

25. Die LEGENDREsche Bedingung. Wir entwickeln die Determinante (24. 6) nach Potenzen von $h_{i\beta}$ und bestimmen die linearen und quadratischen Glieder dieser Entwickelung. Hierzu führen wir die Bezeichung ein

$$m_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \pi_{i\alpha} h_{i\beta}, \tag{25. 1}$$

aus welcher mit ähnlichen Abkürzungen, wie im § **8**, folgt

$$\delta_{\alpha\beta}\, m = m_{\varrho\beta}\, \overline{m}_{\varrho\alpha}$$

und nach Differentiation

$$\delta_{\alpha\beta}\, dm = m_{\varrho\beta}\, d\overline{m}_{\varrho\alpha} + \overline{m}_{\varrho\alpha}\, dm_{\varrho\beta}.$$

Wir falten diese Gleichung mit $\overline{m}_{\sigma\beta}$ und erhalten, falls wir noch den Summationsbuchstaben β durch λ ersetzen

$$m\, d\overline{m}_{\sigma\alpha} = \overline{m}_{\sigma\alpha}\, dm - \overline{m}_{\varrho\alpha}\, \overline{m}_{\sigma\lambda}\, dm_{\varrho\lambda}.$$

Nun ist bekanntlich $dm = \overline{m}_{\varrho\lambda}\, dm_{\varrho\lambda}$ und wir haben schliesslich

$$m\, d\overline{m}_{\sigma\alpha} = (\overline{m}_{\sigma\alpha}\, \overline{m}_{\varrho\lambda} - \overline{m}_{\varrho\alpha}\, \overline{m}_{\sigma\lambda})\, dm_{\varrho\lambda}. \tag{25. 2}$$

Nun folgt aus (24. 6)

$$\frac{\partial \overline{\Delta}}{\partial h_{i\alpha}} = f\, \overline{m}_{\sigma\alpha}\, \pi_{i\sigma} \tag{25. 3}$$

und aus (25. 2)

$$m\, \frac{\partial \overline{m}_{\sigma\alpha}}{\partial h_{j\beta}} = (\overline{m}_{\sigma\alpha}\, \overline{m}_{\varrho\beta} - \overline{m}_{\varrho\alpha}\, \overline{m}_{\sigma\beta})\, \pi_{j\varrho}. \tag{25. 4}$$

Also ist nach (25. 3)

$$\frac{\partial^2 \overline{\Delta}}{\partial h_{i\alpha}\, \partial h_{j\beta}} = \frac{f}{m}\, (\overline{m}_{\sigma\alpha}\, \overline{m}_{\varrho\beta} - \overline{m}_{\varrho\alpha}\, \overline{m}_{\sigma\beta})\, \pi_{i\sigma}\, \pi_{j\varrho}. \tag{25. 5}$$

Für $h_{i\beta} = 0$ ist nun $\overline{m}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ und aus (25. 3) und (25. 5) folgt also

$$\left.\frac{\partial \overline{\Delta}}{\partial h_{i\alpha}}\right|_0 = f\, \pi_{i\alpha}, \tag{25. 6}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \overline{\Delta}}{\partial h_{i\alpha}\, \partial h_{j\beta}}\right|_0 = f\, (\pi_{i\alpha}\, \pi_{j\beta} - \pi_{i\beta}\, \pi_{j\alpha}). \tag{25. 7}$$

Wenn wir also jetzt die E-Funktion (24. 7) nach Potenzen von

$(\overline{p}_{i\beta}-p_{i\beta})$ entwickeln, so fehlen sowohl das konstante wie auch die linearen Glieder. Die quadratischen Glieder der Entwickelung bilden eine quadratische Form, die folgendermassen lautet:

$$\boxed{\begin{aligned}2Q=(\overline{p}_{i\alpha}-p_{i\alpha})\,(\overline{p}_{j\beta}-p_{j\beta})\Big\{&\frac{\partial^2 f}{\partial p_{i\alpha}\partial p_{j\beta}}-\\ &-\frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial p_{i\alpha}}\frac{\partial f}{\partial p_{j\beta}}-\frac{\partial f}{\partial p_{j\alpha}}\frac{\partial f}{\partial p_{i\beta}}\right)\Big\}.\end{aligned}} \tag{25.8}$$

Die Legendre*sche Bedingung* unseres Problems besteht in der Forderung, dass die quadratische Form (25.8) positiv definit sein soll. Es ist zu beachten, dass die Determinante dieser quadratischen Form mit dem Ausdruck (22.10) zusammenfällt: also ist jedesmal dann, wo die Legendresche Bedingung erfüllt ist, auch die Möglichkeit gegeben, kanonische Koordinaten einzuführen.

Zu beachten ist endlich, dass in der Legendreschen Bedingung auch die ersten Ableitungen von f nach den $p_{i\alpha}$ vorkommen.

26. Die E-Funktion in kanonischen Koordinaten. Für den Fall, dass man von Anfang an das Variationsproblem in kanonischen Koordinaten durch die Funktion $F(x_i, t_\alpha, P_{i\alpha})$ vorgibt, ist es nützlich für die E-Funktion einen Ausdruck zu haben, in welchem diese Koordinaten allein vorkommen. Dazu setze man in (24.2)

$$P_{i\alpha}=\overline{P}_{i\alpha}+\overline{F}\,k_{i\alpha} \tag{26.1}$$

und transformiere den Ausdruck (24.2) ganz ähnlich, wie wir es im § 24 gemacht haben. Man findet schliesslich

$$\boxed{\frac{F}{\overline{f}}\,E=F-\frac{1}{\overline{F}^{\mu-1}}\,|\,\delta_{\alpha\beta}\overline{F}+\overline{\Pi}_{i\beta}(P_{i\alpha}-\overline{P}_{i\alpha})|.} \tag{26.2}$$

Berechnet man jetzt die Legendresche Bedingung aus (26.2), so findet man eine Formel, die der Relation (25.8) ganz analog ist.

Endlich bemerke man, dass in Folge der Reziprozität (§ 15) die E-Funktion sowohl in den ursprünglichen als auch in den kanonischen Koordinaten auch durch n-reihige Determinanten dargestellt werden kann.

27. Die Differentialgleichungen der geodätischen Felder. Nach den §§ 20 und 22 erhält man ein geodätisches Feld, wenn man, mit den Bezeichungen des § 19, die Gleichungen

$$f=\Delta=c,\quad f_{p_{i\alpha}}=\pi_{i\alpha}=S_{\lambda i}\,\overline{c}_{\lambda\alpha} \tag{27.1}$$

gleichzeitig befriedigt. Nach dem § **18** ist aber dieses System von Gleichungen vollständig gleichwertig mit den folgenden:

(27. 2) $$S_{\alpha i} = P_{i\varrho} S_{\alpha\varrho},$$

(27. 3) $$F \,.\, |S_{\alpha\beta}| = 1.$$

Hat man nun die Funktion $F(x_i, t_\alpha, P_{i\alpha})$ berechnet, so kann man ein geodätisches Feld folgendermassen finden: Man bestimme aus den Gleichungen (27. 2) die $P_{i\alpha}$ als rationale Funktionen der ersten partiellen Ableitungen der $S_\alpha(x_i, t_\beta)$ und setze die gefundenen Werte in (27. 3) ein. So erhält man *eine* partielle Differentialgleichung erster Ordnung für μ Funktionen S_α, von denen man also $(\mu - 1)$ ganz willkürlich wählen kann.

28. Durch ein beliebig gegebenes geodätisches Feld werden mit Hilfe von (27. 2) und (27. 3) die $P_{i\alpha}$ und F, und hierauf durch Anwendung der Formeln der Kapitel I. alle übrigen Grössen als Funktionen von (x_i, t_α) d. h. als Ortsfunktionen des $(n+\mu)$ dimensionalen Raumes bestimmt.

Man kann sich aber auch umgekehrt die $P_{i\alpha}$ als solche Ortsfunktionen von vornherein geben, und nach den Bedingungen fragen, die dafür notwendig und hinreichend sind, dass Funktionen $S_\alpha(x_i, t_\beta)$ gefunden werden können, für welche die Relationen (27. 2) und (27. 3) bestehen.

Wir führen den linearen Operator

(28. 1) $$L_i(\ ) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\ ) - P_{i\varrho}\frac{\partial}{\partial t_\varrho}(\ )$$

ein. Die Gleichungen (27. 2) besagen dann, dass das System von Differentialgleichungen

(28. 2) $$L_i S_\alpha = 0$$

für die μ unabhängigen Funktionen S_α gelten soll, und daher ein JACOBI*sches System* sein muss. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierzu ist bekanntlich die des identischen Verschwindens der Klammerausdrücke $(L_i L_j - L_j L_i) S$; sie ist den folgenden Relationen äquivalent

(28. 3) $$L_j P_{i\varrho} - L_i P_{j\varrho} = 0.$$

Setzen wir also zur Abkürzung

(28. 4) $$\boxed{[ij\varrho] = \frac{\partial P_{i\varrho}}{\partial x_j} - \frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial x_i} - \left(P_{j\sigma}\frac{\partial P_{i\varrho}}{\partial t_\sigma} - P_{i\sigma}\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial t_\sigma}\right),}$$

so haben wir zu schreiben

(28. 5) $$[ij\varrho] = 0.$$

29. Es seien die Bedingungen (28. 5) alle verifiziert. Zwischen zwei Systemen S_α und T_α von je μ unabhängigen Lösungen des Jacobischen Systems (28. 2) besteht immer die Relation

(29. 1) $$|S_{\alpha\beta}|\frac{\partial(T_1 \dots T_\mu)}{\partial(S_1 \dots S_\mu)} = |T_{\alpha\beta}|,$$

die eine bekannte Eigenschaft der Funktionaldeterminanten darstellt. Gibt man sich die T_β, so ist also die Gleichung (27. 3) dann und nur dann lösbar, wenn man die S_α als Funktionen der T_β so bestimmen kann, dass die Gleichung

(29. 2) $$\frac{\partial(T_1, \dots, T_\mu)}{\partial(S_1, \dots, S_\mu)} = (F)\,|T_{\alpha\beta}|$$

besteht. Hierbei bedeutet (F) diejenige Funktion der $(n+\mu)$ Veränderlichen (x_i, t_α), die man erhält, wenn man in $F(x_i, t_\alpha, P_{i\alpha})$ die $P_{i\alpha}$ als Funktionen von (x_i, t_α) einsetzt. Die Relation (29. 2) kann aber dann und nur dann befriedigt werden, wenn die rechte Seite dieser Gleichung selbst eine Funktion der T_β ist, d. h. wenn sie dem Jacobischen System (28. 2) genügt. Die Gleichung (27. 3) ist also äquivalent dem System

(29. 3) $$L_i((F) \,.\, |T_{\alpha\beta}|) = 0.$$

Durch Entwickelung von (29. 3) erhalten wir:

(29. 4) $$|T_{\alpha\beta}|\, L_i(F) + (F)\, \overline{T}_{\varrho\sigma} L_i \frac{\partial T_\varrho}{\partial t_\sigma} = 0.$$

Nun ist

(29. 5) $$L_i \frac{\partial T_\varrho}{\partial t_\sigma} = \frac{\partial^2 T_\varrho}{\partial x_i \partial t_\sigma} - P_{i\lambda} \frac{\partial^2 T_{\varrho\sigma}}{\partial t_\sigma \partial t_\lambda}.$$

Andererseits ist, weil T_ϱ nach Voraussetzung eine Lösung von (28. 2) ist,

$$\frac{\partial^2 T_\varrho}{\partial x_i \partial t_\sigma} = \frac{\partial}{\partial t_\sigma}\left(\frac{\partial T_\varrho}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial t_\sigma}\left(P_{i\lambda} \frac{\partial T_\varrho}{\partial t_\lambda}\right);$$

dies in (29. 5) eingesetzt, liefert die Gleichung

(29. 6) $$L_i \frac{\partial T_\varrho}{\partial t_\sigma} = \frac{\partial P_{i\lambda}}{\partial t_\sigma} T_{\varrho\lambda}.$$

Wir setzen diesen Wert in (29. 4) ein und erhalten nach Division durch $|T_{\alpha\beta}|$ die Bedingung, die wir aufstellen wollten:

(29. 7) $$L_i(F) + (F)\frac{\partial P_{i\sigma}}{\partial t_\sigma} = 0.$$

30. Wir setzen jetzt zur Abkürzung

$$(30.1) \qquad [i] = L_i(F) + (F)\frac{\partial P_{i\sigma}}{\partial t_\sigma} + \Pi_{j\varrho}\,[i\,j\,\varrho]$$

und entwickeln $L_i(F)$ unter Berücksichtigung von (23.2). Wir erhalten

$$[i] = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \Pi_{j\varrho}\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial x_i} - P_{i\sigma}\left(\frac{\partial F}{\partial t_\sigma} + \Pi_{j\varrho}\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial t_\sigma}\right) + \\ + F\frac{\partial P_{i\sigma}}{\partial t_\sigma} + \Pi_{j\varrho}\,[i\,j\,\varrho].$$

Hieraus folgt, wenn man noch (28.4) benutzt,

$$(30.2) \quad [i] = \frac{\partial F}{\partial x_i} - P_{i\sigma}\frac{\partial F}{\partial t_\sigma} + \Pi_{j\varrho}\left(\frac{\partial P_{i\varrho}}{\partial x_j} - P_{j\sigma}\frac{\partial P_{i\varrho}}{\partial t_\sigma}\right) + F\frac{\partial P_{i\sigma}}{\partial t_\sigma},$$

eine Gleichung, die mit unseren früheren Bezeichnungen auch geschrieben werden kann

$$(30.3) \quad \boxed{[i] = \frac{\partial F}{\partial x_i} - P_{i\sigma}\frac{\partial F}{\partial t_\sigma} + \Pi_{j\varrho}\frac{\partial P_{i\varrho}}{\partial x_j} + A_{\sigma\varrho}\frac{\partial P_{i\varrho}}{\partial t_\sigma}.}$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, für die Existenz eines geodätischen Feldes lauten schliesslich

$$(30.4) \qquad [i\,j\,\varrho] = 0, \quad [i] = 0.$$

31. Die Eulerschen Gleichungen. Es ist zwar nicht schwer direkt zu beweisen, dass eine jede μ-dimensionale Mannigfaltigkeit, die durch ein geodätisches Feld transversal geschnitten wird, den Eulerschen Differentialgleichungen

$$(31.1) \qquad \frac{d}{dt_\alpha} f_{p_{i\alpha}} - f_{x_i} = 0$$

genügen muss; viel interessanter und lehrreicher ist es aber, eine allgemeine Identität aufzustellen, aus welcher diese Folgerung sofort zu entnehmen sein wird.

Wir geben uns zu diesem Zweck die $p_{i\alpha}$ als ganz beliebige Funktionen von (x_i, t_α) und berechnen die übrigen Grössen $f(x_i, t_\alpha, p_{i\alpha})$, $\pi_{i\alpha} = f_{p_{i\alpha}}$, $P_{i\alpha}$ u. s. f. mit Hülfe unserer früheren Formeln ebenfalls als Funktionen des Ortes.

Ferner führen wir für jede Funktion $\psi(x_i, t_\alpha)$ das Zeichen $\frac{d\psi}{dt_\alpha}$ ein, das insbesondere in (31.1) vorkommt und durch die

Relation

$$\frac{d\psi}{dt_\alpha}=\frac{\partial\psi}{\partial t_\alpha}+\frac{\partial\psi}{\partial x_i}p_{i\alpha} \tag{31.2}$$

definiert wird.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir die Relation (13.8)

$$F\pi_{i\alpha}=P_{i\sigma}\bar{g}_{\sigma\alpha}$$

und folgern aus dieser Gleichung durch Differentiation:

$$F\,d\pi_{i\alpha}=-\pi_{i\alpha}dF+\bar{g}_{\sigma\alpha}dP_{i\sigma}+P_{i\sigma}d\bar{g}_{\sigma\alpha}. \tag{31.3}$$

Nach einer der Gleichung (25.2) nachgebildeten Formel ist nun

$$g\,d\bar{g}_{\sigma\alpha}=(\bar{g}_{\sigma\alpha}\bar{g}_{\varrho\lambda}-\bar{g}_{\varrho\alpha}\bar{g}_{\sigma\lambda})\,dg_{\varrho\lambda},$$

also nach (13.4), (13.8), (13.9) und (13.2)

$$Ff\,P_{i\sigma}d\bar{g}_{\sigma\alpha}=F(\pi_{i\alpha}\bar{g}_{\varrho\lambda}-\pi_{i\lambda}\bar{g}_{\varrho\alpha})(p_{j\lambda}dP_{j\varrho}+P_{j\varrho}dp_{j\lambda}),$$

$$\begin{aligned} fP_{i\sigma}d\bar{g}_{\sigma\alpha}=&\,(f\pi_{i\alpha}\Pi_{j\varrho}-\bar{g}_{\varrho\alpha}p_{j\lambda}\pi_{i\lambda})\,dP_{j\varrho}+\\ &+F(\pi_{i\alpha}\pi_{j\lambda}-\pi_{i\lambda}\pi_{j\alpha})\,dp_{j\lambda}. \end{aligned} \tag{31.4}$$

Durch Einsetzen dieser Relation in (31.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} Ff\,d\pi_{i\alpha}=&-f\pi_{i\alpha}dF+(f\pi_{i\alpha}\Pi_{j\varrho}+\bar{g}_{\varrho\alpha}b_{ji})\,dP_{j\varrho}+\\ &+F(\pi_{i\alpha}\pi_{j\lambda}-\pi_{i\lambda}\pi_{j\alpha})\,dp_{j\lambda}. \end{aligned} \tag{31.5}$$

Wir führen nun die Bezeichung ein:

$$\Omega_i=Ff\left(\frac{d\pi_{i\alpha}}{dt_\alpha}-f_{x_i}\right)-F\pi_{i\alpha}\pi_{j\lambda}\left(\frac{dp_{j\lambda}}{dt_\alpha}-\frac{dp_{j\alpha}}{dt_\lambda}\right), \tag{31.6}$$

und erhalten aus (31.5)

$$\Omega_i=-Fff_{x_i}-f\pi_{i\alpha}\frac{d(F)}{dt_\alpha}+(f\pi_{i\alpha}\Pi_{j\varrho}+\bar{g}_{\varrho\alpha}b_{ji})\frac{dP_{j\varrho}}{dt_\alpha}. \tag{31.7}$$

Nun ist nach (23.1), (23.2) und (31.2)

$$-Fff_{x_i}=f^2F_{x_i}=f^2\frac{\partial(F)}{\partial x_i}-f^2\Pi_{j\varrho}\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial x_i},$$

$$\frac{d(F)}{dt_\alpha}=\frac{\partial(F)}{\partial x_k}p_{k\alpha}+\frac{\partial(F)}{\partial t_\alpha},$$

$$\frac{dP_{j\varrho}}{dt_\alpha}=\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial x_k}p_{k\alpha}+\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial t_\alpha}.$$

Dies alles in (31.7) eingesetzt, liefert nach einigen Vereinfachungen:

$$\begin{aligned} \Omega_i=&\,fb_{ki}\frac{\partial(F)}{\partial x_k}+f(\Pi_{k\varrho}b_{ji}-\Pi_{j\varrho}b_{ki})\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial x_k}-\\ &-f\pi_{i\alpha}\frac{\partial(F)}{\partial t_\alpha}+(f\pi_{i\alpha}\Pi_{j\varrho}+\bar{g}_{\varrho\alpha}b_{ji})\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial t_\alpha}. \end{aligned} \tag{31.8}$$

Mit Benutzung von (15. 6) und (28. 1) kann nun dies geschrieben werden:

$$(31.9) \qquad \Omega_i = f b_{ki} L_k(F) - f \Pi_{j\varrho} b_{ki} \left(\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial x_k} - \frac{\partial P_{k\varrho}}{\partial x_j} \right) + \\ + (f \pi_{i\alpha} \Pi_{j\varrho} + \bar{g}_{\varrho\alpha} b_{ji}) \frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial t_\alpha}.$$

Nun ist aber nach (28. 4) und (30. 1)

$$\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial x_k} - \frac{\partial P_{k\varrho}}{\partial x_j} = [j\,k\,\varrho] + P_{k\sigma} \frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial t_\sigma} - P_{j\sigma} \frac{\partial P_{k\varrho}}{\partial t_\sigma},$$

$$L_k(F) = [k] + \Pi_{j\varrho} [j\,k\,\varrho] - (F) \frac{\partial P_{k\sigma}}{\partial t_\sigma}.$$

Setzt man diese Grössen in (31. 9) ein und bemerkt noch, dass nach (15. 6), (13. 7), (12. 2) und (12. 1)

$$b_{ki} P_{k\sigma} = \pi_{i\sigma},$$

$$\bar{g}_{\varrho\sigma} = F a_{\varrho\sigma} = f A_{\sigma\varrho} = f(\delta_{\varrho\sigma} F - P_{j\varrho} \Pi_{j\sigma})$$

ist, so verschwinden fast alle Glieder und es bleibt

$$(31.10) \qquad \Omega_i = f b_{ki} [k].$$

Die Identität, die wir aufstellen wollten, erhält man durch die Vergleichung von (31. 6) und (31. 10); sie lautet

$$(31.11) \qquad \boxed{\frac{d\pi_{i\alpha}}{dt_\alpha} - f_{x_i} = \frac{b_{ki}}{F} [k] + \frac{\pi_{i\alpha} \pi_{j\beta}}{f} \left(\frac{dp_{j\alpha}}{dt_\beta} - \frac{dp_{j\beta}}{dt_\alpha} \right).}$$

32. Gehören nun insbesondere die Ortsfunktionen $p_{i\alpha}(x_j, t_\beta)$, die wir uns vorgegeben haben, zu einem geodätischen Feld, das eine μ-dimensionale Mannigfaltigkeit transversal schneidet, so ist in jedem Punkte dieser Mannigfaltigkeit

$$[k] = 0, \quad \frac{dp_{j\alpha}}{dt_\beta} = \frac{dp_{j\beta}}{dt_\alpha}.$$

Die linke Seite von (31. 11) muss dann auf dieser Mannigfaltigkeit verschwinden, und diese ist ein Integral der EULERschen Gleichungen (31. 1).

Wir wollen das geodätische Feld ein *ausgezeichnetes Feld* nennen, wenn durch jeden Punkt dieses Feldes eine Extremale gelegt werden kann, die durch das Feld transversal geschnitten wird. Die betreffenden Extremalen bilden dann selbst ein Feld und die Figur, die aus diesen Extremalen und aus den Mannigfaltigkeiten $S_\alpha = \lambda_\alpha$ gebildet wird, heisst eine *vollständige Figur* des Variationsproblems.

33. Wir betrachten eine beliebige Schar von Extremalen, die ein Gebiet des $(n+\mu)$-dimensionalen Raumes einfach überdecken. Die linke Seite und das letzte Glied der Identität (31. 11) müssen dann verschwinden, woraus folgt, dass alle $[k]=0$ sind.

Dafür aber, dass die Extremalen ein Feld bilden, das eine vollständige Figur des Variationsproblems erzeugt, müssen noch ausserdem alle $[j\,k\,\varrho]=0$ sein, was bekanntlich schon für $\mu=1$ nicht immer stattzufinden braucht.

(*Eingegangen am 20. Juli 1929.*)

Remarques sur „la meilleure approximation en moyenne“ et sur le problème de Dirichlet.

Par GASTON JULIA à Versailles.

Introduction. J'ai montrè dans un mémoire inséré aux comptes rendus du Congrès International de Bologne de Septembre 1928, et exposant une communication faite à ce congrès, comment on pourrait résoudre le problème de DIRICHLET relatif à l'aire bornée limitée par une *courbe de* JORDAN simple fermée C, par le procédé d'approximation suivant: $f(m)$ étant la fonction donnée, continue sur C, vers laquelle doit tendre la fonction $F(x, y)$ cherchée, harmonique dans C, quand le point (x, y) tend vers m de C, on détermine le (ou les) polynome harmonique $P_n(x, y)$ de degré n dont *„l'écart à $f(m)$ sur C“* est minimum; lorsque n devient infini $P_n(x, y)$ converge uniformément dans C et sur C vers la fonction $F(x, y)$ cherchée. Dans le mémoire précédent, l'écart de $f(m)$ à $P_n(m)$ sur C a été défini comme le Maximum de $|f(m)-P_n(m)|$ lorsque m décrit C.

On va résoudre maintenant le même problème en donnant de l'écart une autre définition. La courbe de JORDAN C étant représentée paramétriquement par $x=x(t)$, $y=y(t)$, et la donnée $f(m)$ sur C étant une fonction du paramètre t dénommée $f(t)$, nous appellerons ici écart à $f(t)$ sur C, du polynome $P(x, y)$ l'intégrale: $\int_0^{2\pi} |f(t)-P[x(t), y(t)]|^p dt$, p étant un nombre fixe quelconque >1. Nous montrerons l'existence d'un polynome harmonique d'ordre $\leqq n$ dont l'écart à $f(t)$ sur C est minimum, et nous montrerons qu'il tend dans C vers $F(x, y)$, solution du problème de DIRICHLET relatif à la donnée $f(t)$.

Mais, *à priori,* la représentation paramétrique de C étant, dans une large mesure indéterminée, si l'on veut que cette détermination n'influe pas sur le polynome $P_n(x, y)$ d'écart minimum, il faut choisir un paramètre de représentation θ qui ait un *sens géométrique.* Une courbe de JORDAN simple fermée n'étant pas rectifiable en général, il n'est pas possible de songer au paramètre s, abscisse curviligne, comme l'ont fait pour le cas particulier $p = 2$, M. SERGE BERNSTEIN (*C. R. de l'Académie des Sciences de Paris,* **148,** 17 mai 1909) et, après lui, M. MARCEL BRILLOUIN et M. PICONE (V. PICONE, *Rendiconti della Reale Academia dei Lincei,* 1922, p. 357).

Nous choisirons ici pour paramètre θ, celui sur lequel la reprèsentation conforme a attiré l'attention, et grâce auquel on peut notamment, comme l'a montré M. FEJÉR, représenter paramétriquement toute courbe de JORDAN simple fermée par des fonctions $x(\theta)$, $y(\theta)$, *continues et développables en série de* FOURIER. Nous utiliserons ici surtout des propriétés de la représentation conforme, les travaux précédemment cités se rattachant surtout à la théorie des séries de fonctions orthogonales.

1. *Définition du paramètre θ.* Imaginons la courbe de JORDAN C du plan $z = x + iy$ représentée paramétriquement à l'aide du paramètre θ ($0 \leqq \theta \leqq 2\pi$) dont le sens géométrique est le suivant:

On sait que O, origine du plan z, étant un point intérieur à C, on peut représenter l'intérieur de C d'une manière conforme sur l'intérieur d'un cercle Γ du plan Z ayant pour centre l'origine O du plan Z et pour rayon l'unité. La fonction de correspondance conforme $Z = g(z)$ est parfaitement définie si on donne l'argument de $g'(0)$; nous choisissons ici $g'(0)$ réel et positif (arg. de $g'(0)$ nul). Alors on sait (CARATHÉODORY) que $g(z)$ est continue sur C et fait correspondre à chaque point m de C un point M et un seul de Γ, la correspondance entre m et M étant biunivoque et bicontinue. Appelons θ l'argument du point M de Γ qui correspond ainsi au point m (d'affixe z) de C. Les coordonnées de m seront ainsi des fonctions $x(\theta)$ et $y(\theta)$ continues et périodiques au moyen desquelles C sera représenté paramétriquement et correspondra d'une manière biunivoque et bicontinue au cercle Γ. On remarquera que, si l'argument de $g'(0)$ est choisi $\neq 0$, cela revient comme on sait à multiplier $g(z)$ par une constante $e^{i\alpha}$ (α réel), donc à augmenter tous les θ d'une même constante, et ceci n'a aucune importance pour ce qui va suivre.[1])

[1]) A vrai dire, le point M de Γ correspondant à un point m de C (et par suite la valeur de θ) dépend du point O choisi pour origine dans le

2. La représentation de C sur Γ par $z = x(\theta) + iy(\theta)$ étant ainsi faite, une fonction continue $f(m)$ de m sur C devient une fonction continue de θ que nous désignons par $f(\theta)$. Soit $\varphi(x, y)$ une fonction continue de x et y dans C et sur C, nous appellerons ici écart de φ à f sur C l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta) - \varphi[x(\theta), y(\theta)]|^p \, d\theta$$

p étant un nombre positif > 1.

3. *Existence.* Parmi tous les polynomes harmoniques $P_n(x, y)$ de degré $\leq n$ (ils dépendent de $2n+1$ paramètres réels indépendants) en existe-t-il un ou plusieurs $P_n(x, y)$ pour lesquels l'écart à f sur C,

$$I[P_n] = \int_0^{2\pi} |f(\theta) - P_n[x(\theta), y(\theta)]|^p \, d\theta$$

soit minimum?

---

plan z. Ce que l'on dira dans la suite, p. ex. la définition du polynome harmonique P_n de degré n, qui s'écarte le moins de $f(m)$ sur C, dépendra évidemment du choix de O. Remplacer O par un autre point O_1, revient à faire correspondre à m (intérieur à C) successivement M et M_1 (intérieurs à Γ) et liés entre eux par une relation homographique conservant le cercle I $\left(Z_1 = \dfrac{aZ+b}{cZ+a}\right)$; cette relation donne la relation qui lie θ (argument de Z lorsque m est sur C) à θ_1 (argument de Z_1). L'intégrale définissant l'écart, avec le nouveau choix O_1 de l'origine sera

$$\int_0^{2\pi} |f(m) - g(m)|^p \, d\theta_1 = \int_0^{2\pi} |f(m) - g(m)|^p \frac{d\theta_1}{d\theta} \, d\theta.$$

On reconnaît aisément que $\theta_1(\theta)$ est toujours croissante et que l'on a, Z étant sur Γ, $\dfrac{d\theta_1}{d\theta} = \left| \dfrac{ad-bc}{(cZ+d)^2} \right|$. Lorsque z décrit C, Z décrit Γ, $cZ+d$ ne s'annule pas sur Γ, le point $Z = -\dfrac{d}{c}$ étant certainement extérieur à I, donc $\dfrac{d\theta_1}{d\theta}$ reste compris entre deux limites positives. Le changement de O et son remplacement par O_1 équivaut par conséquent à remplacer la moyenne qui définit l'écart par une moyenne où *chaque élément différentiel est affecté* d'un poids $\left(\dfrac{d\theta_1}{d\theta}\right)$. Cette modification, bien qu'entrainant avec elle une modification des polynomes P_n de meilleure approximation, n'infirme aucune des conclusions qui suivent: existence, unicité, convergence des polynomes de meilleure approximation.

Observons que l'écart $I[P_n]$ est fonction continue des $2n+1$ paramètres figurant dans P_n. De plus x est un polynome harmonique de degré $\leqq n$. Si donc on ne considère que les P_n dont l'écart à f est moindre que celui de x, ils seront tels que

$$\int_0^{2\pi} |f-P_n|^p d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |f(\theta) - x(\theta)|^p d\theta = \lambda.$$

Or, on sait que, pour $p>1$

$$\Big[\int_0^{2\pi} |P_n|^p\, d\theta\Big]^{1/p} \leqq \Big[\int_0^{2\pi} |P_n - f|^p\, d\theta\Big]^{1/p} + \Big[\int_0^{2\pi} |f|^p\, d\theta\Big]^{1/p} \leqq \lambda^{1/p} + \mu^{1/p},$$

en posant

$$\int_0^{2\pi} |f|^p\, d\theta = \mu.$$

Les P_n entre lesquels il faut choisir sont donc tels que

$$\int_0^{2\pi} |P_n|^p d\theta \leqq [\lambda^{1/p} + \mu^{1/p}]^p.$$

Or,

$$\int_0^{2\pi} |P_n|\, d\theta < \int_0^{2\pi} |P_n|^p d\theta$$

puisque $p>1$. Il en résulte que les $|P_n|$ sont bornés dans tout domaine intérieur à C.

En effet, si l'on fait correspondre $z=x+iy$ intérieur à C et $Z=X+iY$ intérieur à Γ par $Z=g(z)$ ou la fonction inverse $z=h(Z)$, $P_n(x,y)$ devient une fonction $\mathcal{S}_n(X, Y)$ harmonique dans Γ et continue sur Γ; on a $P_n[x(\theta), y(\theta)] = \mathcal{S}_n(\cos\theta, \sin\theta)$. Donc:

$$\int_0^{2\pi} |\mathcal{S}_n(\cos\theta, \sin\theta)|\, d\theta < [\lambda^{1/p} + \mu^{1/p}]^p.$$

La fonction harmonique $\mathcal{S}_n(X, Y)$ ayant son module borné *en moyenne* sur Γ sera elle-même bornée en module dans tout domaine intérieur à Γ. En effet (X, Y) étant un point intérieur au cercle Γ et (A, B) un point de ce cercle, la fonction de Green $G(X, Y; A, B)$ et sa dérivée normale au point (A, B), $\frac{dG}{dn}$, restent uniformément bornées tant que (X, Y) appartient à un domaine fermé Δ intérieur à Γ; par suite, puisque

$$\mathcal{S}_n(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{S}_n(A, B) \frac{dG}{dn} d\theta$$

on aura dans Δ

$$|\mathcal{S}_n(X, Y)| < \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{S}_n(A, B)| \, d\theta < \frac{M(\lambda^{1/p} + \mu^{1/p})^p}{2\pi}$$

si l'on a dans Δ

$$\left| \frac{dG}{dn} \right| < M.$$

Il en résulte que les P_n envisagés sont tous en module $< \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ étant un nombre constant) lorsque (x, y) reste dans un domaine D intérieur à C Les coefficients de ces P_n sont donc, eux aussi, bornés en module; dans l'espace à $2n+1$ dimensions, le point ayant pour coordonnées ces $2n+1$ coefficients reste reste dans un domaine borné $\mathfrak{D}$. $I(P_n)$ est une fonction continue positive de ce point dans $\mathfrak{D}$, elle atteint son minimum en un point au moins de $\mathfrak{D}$. L'existence d'un polynome P_n au moins dont l'écart à f sur C soit minimum est donc établie de ce fait. (Nous appellerons ε_n l'écart minimum ainsi défini pour chaque degré n.)

4. *Unicité.* S'il y en avait deux, P_n et Q_n, tout polynome $aP_n + bQ_n$ (a et b réels) serait harmonique comme eux, en particulier $\frac{1}{2} P_n + \frac{1}{2} Q_n = R_n$.

Puisque

$$\varepsilon_n = \int_0^{2\pi} |f - P_n|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |f - Q_n|^p d\theta$$

et puisque

$$f - \frac{P_n + Q_n}{2} = \frac{1}{2} [(f - P_n) + (f - Q_n)],$$

$$\int_0^{2\pi} |f - R_n|^p d\theta = \int_0^{2\pi} \left| \frac{(f - P_n) + (f - Q_n)}{2} \right|^p d\theta.$$

Or, pour $p > 1$, $\left| \frac{\alpha + \beta}{2} \right|^p < \frac{|\alpha|^p + |\beta|^p}{2}$ excepté si $\alpha = \beta$, car d'une part $\left| \frac{\alpha + \beta}{2} \right| \leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{2}$, et d'autre part, pour $p > 1$, la courbe

$y = x^p$ étant concave vers le haut, on aura

$$\left|\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}\right|^p < \frac{1}{2}\,[|\alpha|^p + |\beta|^p].$$

Il en résulte que

$$\int_0^{2\pi} |f - R_n|^p\, d\theta < \frac{1}{2}\left\{\int_0^{2\pi} |f - P_n|^p\, d\theta + \int_0^{2\pi} |f - Q_n|^p\, d\theta\right\}$$

ou $\int_0^{2\pi} |f - R_n|^p\, d\theta < \varepsilon_n$, sans égalité possible, à moins que P_n ne soit égal à Q_n *en tout point de* C, ce qui entraînerait $P_n \equiv Q_n$. Le polynome R_n aurait donc sur C, un écart à f moindre que celui de P_n et de Q_n, alors moindre que ε_n, ce qui est impossible puisque ε_n est l'écart minimum pour le degré n.

Le polynome P_n est donc unique, on l'appelle polynome harmonique d'écart minimum ε_n sur C.

5. En particulier supposons $p = 2$ et supposons que C soit un cercle de centre O, de rayon 1. Alors $x(\theta) = \cos\theta$, $y(\theta) = \sin\theta$ puisque $z = h(Z) \equiv Z$ et $g(z) \equiv z$.

Le polynome harmonique général de degré n est

$$P_n(x, y) = P_n(r\cos\theta, r\sin\theta) =$$
$$= \frac{\alpha_0}{2} + r(\alpha_1\cos\theta + \beta_1\sin\theta) + \ldots + r^n(\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta);$$

en posant

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta;$$

$f(\theta)$ étant continue, le polynome d'écart minimum est celui pour lequel l'intégrale

$$I[P_n] = \int_0^{2\pi} \Bigg| f(\theta) - \left[\frac{\alpha_0}{2} + (\alpha_1\cos\theta + \beta_1\sin\theta) + \ldots + (\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta)\right]\Bigg|^2 d\theta$$

est minimum. Ce polynome a donc pour coefficients α_i, β_i, les *coefficients de* Fourier de $f(\theta)$. Si le développement de Fourier de $f(\theta)$ est $\frac{a_0}{2} + \Sigma(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)$, le polynome d'écart minimum sur C sera pour chaque degré n

$$P_n(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\equiv\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}r^k(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta).$$

On sait que dans ce cas particulier le polynome $P_n(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ converge uniformément dans toute aire intérieure à C vers la somme de la série $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^k(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)$ qui n'est autre que la valeur au point $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ de la fonction harmonique dans C prenant sur C la valeur $f(\theta)$ au point d'argument θ. On sait d'ailleurs à priori (du Bois-Reymond, Lebesgue, Fejér) que, la série de Fourier d'une fonction continue $f(\theta)$ pouvant être divergente, $P_n(\cos\theta,\ \sin\theta)$ peut n'avoir pas de limite, c'est à dire que *le polynome P_n d'écart minimum peut n'avoir aucune limite sur C.* Nous allons maintenant étudier la convergence de P_n à l'intérieur de C dans le cas général.

6. *Convergence des P_n dans le cas général.* Prouvons d'abord que $\lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0$. J'ai en effet démontré dans la mémoire antérieurement cité (Congrès de Bologne 1928) qu'il est possible de développer toute fonction harmonique dans C et continue sur C, en série de polynomes harmoniques convergeant uniformément dans C et sur C, c'est à dire, que pour tout ε positif donné, on peut trouver un polynome harmonique $Q_n(x,y)$ de degré n assez élévé tel que

$$|f(\theta)-Q_n[x(\theta),\ y(\theta)]|<\varepsilon$$

quelque soit θ. L'écart de ce Q_n à f sur C sera donc $<2\pi\varepsilon^p$. L'écart minimum ε_n correspondant au degré n sera donc à fortiori $<2\pi\varepsilon^p$ c'est à dire que $\lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0$.

On a donc $\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi}|f(\theta)-P_n[x(\theta),\ y(\theta)]|^p d\theta=0$ et en appelant $\mathcal{S}_n(X,\ Y)$ la fonction harmonique dans I issue de $P_n(x,y)$ par la représentation conforme $z=h(Z)$ on aura

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi}|f(\theta)-\mathcal{S}_n(\cos\theta,\ \sin\theta)|^p d\theta=0.$$

Par l'exemple de $p=2$ et C cercle unité, nous savons qu'il ne faut pas chercher à prouver la convergence de $\mathcal{S}_n$ vers $f(\theta)$

sur Γ, mais que le convergence de $\mathcal{S}_n(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ vers la fonction harmonique dans Γ, prenant sur Γ les valeurs $f(\theta)$ est plausible.

7. Démontrons en effet cette convergence. Désignons par $F(x, y)$ la fonction harmonique dans C, continue sur C, prenant sur C les valeurs données $f(\theta)$ c'est à dire telle que

$$F[x(\theta),\ y(\theta)] = f(\theta).$$

Par la transformation $z = x + iy = h(X + iY)$ elle devient la fonction $\mathcal{F}(X, Y)$ harmonique dans Γ, continue sur Γ, et on a:

$$\mathcal{F}(\cos\theta,\ \sin\theta) = f(\theta).$$

Envisageons l'intégrale

$$\varepsilon_n(r) = \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(r\cos\theta,\ r\sin\theta) - \mathcal{S}_n(r\cos\theta,\ r\sin\theta)|^p\, d\theta.$$

Puisque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{S}_n$ sont uniformément continues dans et sur Γ on a

$$\lim_{r=1} \varepsilon_n(r) = \varepsilon_n.$$

Admettons, *ce que nous démontrerons plus loin,* que $U(X, Y)$ étant harmonique dans C et continue sur C, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |U(r\cos\theta,\ r\sin\theta)|^p\, d\theta$$

est une fonction croissante de r pour $r < 1$ lorsque $p > 1$.

Ce point étant admis, on aura $\varepsilon_n(r) < \varepsilon_n$ et par conséquent, quelque soit r, $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n(r) = 0$, uniformément dans tout Γ

Il va en résulter que

$$\lim_{n=\infty} \mathcal{S}_n(X, Y) = \mathcal{F}(X, Y),$$

uniformément dans tout domaine Δ intérieur à Γ.

En effet, de la relation $\varepsilon_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(\theta) - \mathcal{S}_n(\cos\theta,\ \sin\theta)|^p\, d\theta$, on a vu qu'il résulte que

$$\left[\int_0^{2\pi} |\mathcal{S}_n|^p\, d\theta\right]^{1/p} < \varepsilon_n^{1/p} + \left[\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p\, d\theta\right]^{1/p}.$$

Les $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\mathcal{S}_n|^p\, d\theta$ et par suite les $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\mathcal{S}_n|\, d\theta$ sont donc bornés supérieurement quel que soit n par un même nombre μ. Le raisonnement fait au N° **3.** prouve d'autre part que dans un domaine quelconque Δ intérieur à Γ, toutes les fonctions harmoniques $\mathfrak{S}_n$ auront leur module $|\mathfrak{S}_n|$ limité supérieurement par un même nombre $\mathfrak{M}$.

Ces fonctions harmoniques $\mathfrak{S}_n$ forment donc dans tout domaine Δ intérieur à Γ une famille également continue dont il est possible d'extraire une suite partielle $\mathfrak{S}_{n_1}, \mathfrak{S}_{n_2}, \ldots$ convergeant en l'intérieur de Γ et cela uniformément dans Δ vers une limite $\Phi(X, Y)$ qui est nécessairement *harmonique*. (Cela se voit aisément par la formule classique $\mathfrak{S}_n(X, Y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{S}_n(A, B)\frac{dG}{dn}d\theta$).

On aura évidemment :

$$\int_0^{2\pi} |\mathfrak{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \Phi(r\cos\theta, r\sin\theta)|^p d\theta =$$

$$= \lim_{i=\infty} \int_0^{2\pi} |\mathfrak{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \mathfrak{S}_{n_i}(r\cos\theta, r\sin\theta)|^p d\theta = \lim_{i=\infty} \varepsilon_{n_i}(r) = 0$$

pour toute valeur de r donnant un cercle intérieur à Δ, c'est à dire, en définitive puisque Δ est arbitrairement voisin de Γ, pour tout $r < 1$.

Mais $\int_0^{2\pi} |\mathfrak{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \Phi(r\cos\theta, r\sin\theta)|^p d\theta = 0$ n'est possible pour deux fonctions continues de θ que si

$$\mathfrak{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) \equiv \Phi(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

pour toute valeur de θ et pour toute valeur $r < 1$. Donc, $\Phi(X, Y) \equiv \mathfrak{F}(X, Y)$ dans Γ, ce qui démontre que la suite des $\mathfrak{S}_n(X, Y)$ a pour limite $\mathfrak{F}(X, Y)$, et uniformément, dans tout domaine intérieur à Γ.

Il en résulte que, *pour $p > 1$, les polynomes harmoniques $P_n(x, y)$ d'écart minimum à $f(\theta)$ sur C ont pour limite dans C la fonction harmonique $F(x, y)$, solution du problème de* Dirichlet *relatif à la donnée $f(\theta)$ sur C, la convergence ayant lieu dans tout C et uniformément dans tout domaine intérieur à C.* L'exemple de $p = 2$, C cercle unité, nous avertit que la convergence peut ne pas se produire sur C et dépend des propriétés différentielles de $f(\theta)$.

8. Il reste, pour terminer, à prouver le lemme invoqué au N° **7.**

Pour toute fonction $U(r, \theta)$ harmonique dans Γ, la fonction de r

$$I(r) = \int_0^{2\pi} |U(r, \theta)|^p d\theta$$

est croissante lorsque $p > 1$. On reconnait aussitôt que la fonction $V(r, \theta) = |U(r, \theta)|^p$ est dérivable et l'on a

$$I'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial r} d\theta = \frac{1}{r} \int_\gamma \frac{dV}{dn_e} ds$$

γ étant le cercle de centre O de rayon r et $\frac{dV}{dn_e}$ la dérivée normale extérieure de V. On a d'ailleurs:

$$\int_\gamma \frac{dV}{dn_e} ds = \iint_\gamma \Delta V d\sigma.$$

Nous montrerons que $I(r)$ croît avec r, si nous prouvons que $\iint_\gamma \Delta V d\sigma > 0$, pour tout cercle γ de centre O de rayon $r < 1$.

Or ceci résulte de l'inégalité $\Delta V > 0$, vérifiée dans tout Γ comme on le reconnaît aussitôt.

En effet, un calcul simple donne

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = (2p-2)|U|^{p-2}(U_X'^2 + U_Y'^2)$$

en tenant compte de la relation $\Delta U = 0$. Du fait que $p > 1$ on a $\Delta V > 0$ et d'autre part, $p-2$ étant > -1, il n'y a pas de difficulté réelle dans l'intégrale $\iint_\gamma \Delta V d\sigma$ le long des lignes éventuelles où U peut s'annuler.

Le lemme invoqué au N° **7.** est donc démontré. Il résulte d'ailleurs immédiatement des travaux bien connus de M. F. Riesz *sur les fonctions subharmoniques.*

(*Reçu le 3 mai 1929.*)

Sur la théorie des groupes.

Par Etienne Grynaeus à Budapest.

1. La théorie de la structure des groupes finis est fondée par M. E. Cartan sur la considération des expressions de Pfaff qui sont invariantes par les transformations du groupe des paramètres. Dans sa Note : „La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile“ [1]) il développe une méthode à former ces expressions de Pfaff en partant des équations finies du groupe. Le groupe de transformations donné étant à r paramètres chacun des deux groupes des paramètres Γ et $\bar{\Gamma}$ laisse invariantes r expressions de Pfaff. En les désignant respectivement par $\overset{k}{\omega}$ et $\overset{k}{\bar{\omega}}$ $(k=1,\ldots,r)$ je me propose de faire voir le lien étroit qui existe entre les

$\overset{k}{\omega}$ et les transformations infinitésimales de $\bar{\Gamma}$,

$\overset{k}{\bar{\omega}}$ et les transformations infinitésimales de Γ.

A cet effet je suppose que l'on ait, dans un R_n, un groupe simplement transitif

$$(1) \qquad X_k f = \underset{k}{\xi^\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \qquad (k=1,\ldots,n).$$

qui laisse invariantes n expressions indépendantes de Pfaff

$$(2) \qquad \overset{l}{\omega} = \overset{l}{a}_\lambda \, dx^\lambda \qquad (l=1,\ldots,n).$$

Pour qu'il soit ainsi, il faut et il suffit, que le groupe prolongé

$$(3) \qquad X_k^{(1)} f = \underset{k}{\xi^\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial \underset{k}{\xi^\mu}}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\lambda \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\mu} \, ; \quad \dot{x}^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dt}$$

[1]) *Bulletin des Sciences Math.*, **34** (1910), p 250—283.

admette les n invariantes

(4) $$\overset{l}{g} = \overset{l}{a}_\lambda \dot{x}^\lambda \qquad (l = 1, \ldots, n)$$

c'est à dire que l'on ait $X_k^{(1)} \overset{l}{g} = 0$ $(k, l = 1, \ldots, n)$. Or on a

(5) $$\begin{aligned} X_k^{(1)} \overset{l}{g} &= \underset{k}{\xi}^\lambda \frac{\partial \overset{l}{a}_\mu}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\mu + \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\mu}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\lambda \overset{l}{a}_\mu = \\ &= \underset{k}{\xi}^\lambda \frac{\partial \overset{l}{a}_\mu}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\mu + \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu \overset{l}{a}_\lambda = \left(X_k(\overset{l}{a}_\mu) + \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu} \overset{l}{a}_\lambda \right) \dot{x}^\mu \end{aligned}$$

et puisque les $\dot{x}^\mu$ sont indépendants, on en déduit

(6) $$X_k(\overset{l}{a}_\mu) + \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu} \overset{l}{a}_\lambda = 0 \qquad (k, l, \mu = 1, \ldots, n).$$

Or les $\overset{l}{a}_\lambda$ $(l = 1, \ldots, n)$ constituent, par hypothèse, n vecteurs covariants indépendants, donc on a

$$A = \begin{vmatrix} \overset{1}{a}_1 & \ldots & \overset{1}{a}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{n}{a}_1 & \ldots & \overset{n}{a}_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dès lors, si l'on désigne par $\underset{k}{v}^\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, n)$ les mineurs de la k-ième ligne de A divisés par A, on sait que les

(7) $$\underset{k}{v}^\lambda \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

constituent un système de n vecteurs contravariants, indépendants entre eux et l'on a en particulier

(8) $$\underset{k}{v}^\lambda \overset{l}{a}_\lambda = \varepsilon_k^l$$

(9) $$\underset{k}{v}^\nu \overset{k}{a}_\varrho = \varepsilon_\varrho^\nu$$

où $\varepsilon_i^k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ selon que $\begin{cases} i \neq k \\ i = k. \end{cases}$

Ceci posé, envisageons les n transformations infinitésimales

(10) $$V_i f = \underset{i}{v}^\lambda \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$$

nous allons démontrer que l'on a

(11) $$(X_k V_i) f \equiv 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n).$$

En effet, on a

$$(12) \qquad (X_k V_i) f = [X_k (\underset{i}{v}^\lambda) - V_i (\underset{k}{\xi}^\lambda)] \frac{\partial f}{\partial x^\lambda};$$

or

$$(13) \qquad V_i (\underset{k}{\xi}^\lambda) = \underset{i}{v}^\mu \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu}$$

et puisque des équations (6), écrites pour $l = 1, \ldots, n$, on tire

$$\frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{A} \begin{vmatrix} \overset{1}{a}_1 & \ldots & \overset{1}{a}_{\lambda-1} & X_k(\overset{1}{a}_\mu) & \overset{1}{a}_{\lambda+1} & \ldots & \overset{1}{a}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{n}{a}_1 & \ldots & \overset{n}{a}_{\lambda-1} & X_k(\overset{n}{a}_\mu) & \overset{n}{a}_{\lambda+1} & \ldots & \overset{n}{a}_n \end{vmatrix} =$$

$$= -\sum_{l=1}^{n} X_k (\overset{l}{a}_\mu) \underset{l}{v}^\lambda = -\underset{b}{v}^\lambda X_k (\overset{b}{a}_\mu),$$

(13) s'écrira

$$V_i (\underset{k}{\xi}^\lambda) = -\underset{i}{v}^\mu \underset{b}{v}^\lambda X_k (\overset{b}{a}_\mu) = -\underset{i}{v}^\mu \underset{b}{v}^\lambda \underset{k}{\xi}^\nu \frac{\partial \overset{b}{a}_\mu}{\partial x^\nu}.$$

D'autre part on a, d'après (8),

$$\underset{i}{v}^\mu \frac{\partial \overset{b}{a}_\mu}{\partial x^\nu} = -\overset{b}{a}_\mu \frac{\partial \underset{i}{v}^\mu}{\partial x^\nu}$$

et par suite

$$V_i (\underset{k}{\xi}^\lambda) = \underset{b}{v}^\lambda \overset{b}{a}_\mu \underset{k}{\xi}^\nu \frac{\partial \underset{i}{v}^\mu}{\partial x^\nu};$$

donc, d'après (9),

$$V_i (\underset{k}{\xi}^\lambda) = \varepsilon^\lambda_\mu \underset{k}{\xi}^\nu \frac{\partial \underset{i}{v}^\mu}{\partial x^\nu} = \underset{k}{\xi}^\nu \frac{\partial \underset{i}{v}^\lambda}{\partial x^\nu} = X(\underset{i}{v}^\lambda)$$

et par conséquent (11) devient

$$(X_k V_i) f = [X_k (\underset{i}{v}^\lambda) - X_k (\underset{i}{v}^\lambda)] \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \equiv 0,$$

c. q. f. d.

Il en résulte,[2]) que les $V_i f$ $(i = 1, \ldots, n)$ constituent n transformations infinitésimales définissant le *groupe réciproque* du groupe $X_k f$ $(k = 1, \ldots, n)$ donné. On a donc le théorème.

---

[2]) *Voir* par exemple: Lie-Scheffers, *Vorlesungen über continuierliche Gruppen* (Leipzig 1893), p. 444.

Si un groupe simplement transitif laisse invariantes les expressions de Pfaff *indépendantes*

$$\overset{l}{\omega} = \overset{l}{a}_\lambda dx^\lambda \qquad (l = 1, \ldots, n)$$

et en désignant par $A_{k\lambda}$ $(\lambda = 1, \ldots, n)$ *les mineurs de la k-ième ligne du déterminant, différent de zéro,*

$$A = \begin{vmatrix} \overset{1}{a}_1 & \ldots & \overset{1}{a}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{n}{a}_1 & \ldots & \overset{n}{a}_n \end{vmatrix},$$

les n vecteurs contravariants

$$\underset{k}{v}^\lambda = \frac{A_{k\lambda}}{A} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

définissent, à l'aide des formules

$$V_k f = \underset{k}{v}^\lambda \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

les n transformations infinitésimales du réciproque du groupe donné.

Il est à prévoir, que ce théorème admet un réciproque. Nous le démontrons de la manière suivante.

Soit $V_k f = \underset{k}{v}^\lambda \dfrac{\partial f}{\partial x^\lambda}$ $(k = 1, \ldots, n)$ le groupe simplement transitif, réciproque du groupe simplement transitif

$$X_k f = \underset{k}{\xi}^\lambda \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Alors on a

$$X_k(\underset{i}{v}^\lambda) - V_i(\underset{k}{\xi}^\lambda) = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

c'est à dire

$$\text{(14)} \qquad \underset{k}{\xi}^\mu \frac{\partial \underset{i}{v}^\lambda}{\partial x^\mu} = \underset{i}{v}^\mu \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu}.$$

Formons le déterminant

$$V = \begin{vmatrix} \underset{1}{v}^1 & \ldots & \underset{1}{v}^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{n}{v}^1 & \ldots & \underset{n}{v}^n \end{vmatrix}$$

et désignons par $\overset{k}{a}_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, n)$ les mineurs de la k-ième ligne de V divisés par V. Nous allons démontrer, que les n expressions de Pfaff

$$\overset{k}{\omega} = \overset{k}{a}_\lambda \, dx^\lambda \qquad (k = 1, \dots, n)$$

sont invariantes par les transformations infinitésimales du groupe $X_k f$, c'est à dire que l'on a (*voir* (6))

$$(15) \qquad \underset{k}{\xi}^\lambda \frac{\partial \overset{l}{a}_\mu}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu} \overset{l}{a}_\lambda = 0 \qquad (k, l, \mu = 1, \dots, n).$$

A cause de (9) et (8) on peut mettre le premier membre de (14) sous la forme suivante

$$\underset{k}{\xi}^\nu \frac{\partial \underset{i}{v}^\lambda}{\partial x^\nu} = \underset{b}{v}^\lambda \overset{b}{a}_\mu \underset{k}{\xi}^\nu \frac{\partial \underset{i}{v}^\mu}{\partial x^\nu} = - \underset{i}{v}^\mu \underset{b}{v}^\lambda \underset{k}{\xi}^\nu \frac{\partial \overset{b}{a}_\mu}{\partial x^\nu} = - \underset{i}{v}^\mu \underset{b}{v}^\lambda X_k (\overset{b}{a}_\mu) ;$$

donc (14) s'écrira

$$\underset{i}{v}^\mu \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu} = - \underset{i}{v}^\mu \underset{b}{v}^\lambda X_k (\overset{b}{a}_\mu).$$

En multipliant par $\overset{i}{a}_\nu \overset{l}{a}_\lambda$, nous obtiendrons

$$\overset{i}{a}_\nu \overset{l}{a}_\lambda \underset{i}{v}^\mu \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu} + \overset{i}{a}_\nu \overset{l}{a}_\lambda \underset{i}{v}^\mu \underset{b}{v}^\lambda X_k (\overset{b}{a}_\mu) = 0$$

ou bien

$$\overset{l}{a}_\lambda \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\nu} + X_k (\overset{l}{a}_\nu) = 0,$$

et ce ne sont que les équations (15), écrites sous une forme un peu différente.

Nous avons donc le théorème suivant, réciproque du précédent:

$V_k f = \underset{k}{v}^\lambda \dfrac{\partial f}{\partial x^\lambda}$ $(k = 1, \dots, n)$ étant le groupe simplement transitif réciproque du groupe $X_k f = \underset{k}{\xi}^\lambda \dfrac{\partial f}{\partial x^\lambda}$ $(k = 1, \dots, n)$ simplement transitif, en désignant par $\overset{k}{a}_\lambda$ $(\lambda = 1, \dots, n)$ les mineurs de la k-ième ligne du déterminant

$$V = \begin{vmatrix} \underset{1}{v}^1 & \dots & \underset{1}{v}^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \underset{n}{v}^1 & \dots & \underset{n}{v}^n \end{vmatrix}.$$

divisés par V, les n expressions indépendentes de Pfaff

$$\overset{k}{\omega} = \overset{k}{a}_\lambda dx^\lambda \qquad (k=1,\ldots,n)$$

sont invariantes par les transformations infinitésimales du groupe $X_k f$.

2. Remarquons maintenant, qu'étant donné un groupe à r paramètres par ses transformations infinitésimales $X_1 f, \ldots, X_r f$, son premier groupe des paramètres étant Γ, celui-ci est simplement transitif et le second groupe des paramètres $\overline{\Gamma}$ est son réciproque. En désignant par

$$\begin{aligned} U_k f &= \underset{k}{u}^\lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha^\lambda} \\ \overline{U}_k f &= \underset{k}{\overline{u}}^\lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha^\lambda} \end{aligned} \qquad (k=1,\ldots,r)$$

les transformations infinitésimales de Γ resp. de $\overline{\Gamma}$, portant sur les paramètres α, nous savons, d'après ce qui vient d'être dit, que les $U_k f$ $(k=1,\ldots,r)$ laissent invariantes les r expressions de Pfaff indépendentes

$$\overset{l}{\overline{\omega}} = \overset{l}{\overline{a}}_\lambda d\alpha^\lambda \qquad (l=1,\ldots,r)$$

où $\overset{l}{\overline{a}}_\lambda$ $(\lambda=1,\ldots,r)$ désigne les quotients par $\overline{U}$ des mineurs de la l-ième ligne du déterminant

$$\overline{U} = \begin{vmatrix} \underset{1}{\overline{u}}^1 & \ldots & \underset{1}{\overline{u}}^r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{r}{\overline{u}}^1 & \ldots & \underset{r}{\overline{u}}^r \end{vmatrix}.$$

De même, $\overline{U}_k f$ $(k=1,\ldots,r)$ laisse invariantes les r expressions indépendantes de Pfaff

$$\overset{l}{\omega}_\lambda = \overset{l}{a}_\lambda d\alpha^\lambda \qquad (l=1,\ldots,r)$$

les $\overset{l}{a}_\lambda$ étant formées de la même manière que les $\overset{l}{\overline{a}}_\lambda$ du déterminant

$$U = \begin{vmatrix} \underset{1}{u}^1 & \ldots & \underset{1}{u}^r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{r}{u}^1 & \ldots & \underset{r}{u}^r \end{vmatrix}.$$

Donc on a le théorème suivant:

Étant donné un groupe à r paramètres par ses transformations infinitésimales $X_1 f, \ldots, X_r f$, ses deux groupes de paramètres étant

Γ et $\overline{\Gamma}$, aux transformations infinitésimales respectives

$$\begin{array}{lll} \Gamma \; . \; . \; . \; . & U_k f = \underset{k}{u}^{\lambda} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^{\lambda}} & \\ & & (k = 1, \ldots, r). \\ \overline{\Gamma} \; . \; . \; . \; . & \overline{U}_k f = \underset{k}{\overline{u}}^{\lambda} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^{\lambda}} & \end{array}$$

Les deux déterminants respectifs, non identiquement nuls

$$U = \begin{vmatrix} \underset{1}{u}^1 & \ldots & \underset{1}{u}^r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{r}{u}^1 & \ldots & \underset{r}{u}^r \end{vmatrix}, \quad \overline{U} = \begin{vmatrix} \underset{1}{\overline{u}}^1 & \ldots & \underset{1}{\overline{u}}^r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{r}{\overline{u}}^1 & \ldots & \underset{r}{\overline{u}}^r \end{vmatrix}$$

permettent chacun de former r vecteurs covariants $\overset{l}{a}_{\lambda}$ et $\overset{l}{\overline{a}}_{\lambda}$ $(l = 1, \ldots, r)$ où $\overset{l}{a}_{\lambda}$ et $\overset{l}{\overline{a}}_{\lambda}$ $(\lambda = 1, \ldots, r)$ désignent les quotiens des mineurs de la l-ème ligne de U resp. de $\overline{U}$ par U resp. par $\overline{U}$.

Les r expressions indépendantes de Pfaff

$$\overset{l}{\omega} = \overset{l}{a}_{\lambda}\, d\alpha^{\lambda} \qquad (l = 1, \ldots, r)$$

sont invariantes par les transformations infinitésimales du groupe $\overline{\Gamma}$. De même, les r expressions indépendantes de Pfaff

$$\overset{l}{\overline{\omega}} = \overset{l}{\overline{a}}_{\lambda}\, d\alpha^{\lambda} \qquad (l = 1, \ldots, r)$$

sont invariantes par les transformations infinitésimales du groupe Γ.

En outre:

1°. *La connaissance des transformations infinitésimales de Γ et celle des $\overset{l}{\overline{\omega}}$ $(l = 1, \ldots, r)$ permet de former les transformations infinitésimales du groupe $\overline{\Gamma}$.*

2°. *La connaissance des transformations infinitésimales de $\overline{\Gamma}$ et celle des $\overset{l}{\omega}$ $(l = 1, \ldots, r)$ permet de former les transformations infinitésimales du groupe Γ.*

Ce deux propositions résultent immédiatement de notre premier théorème.

(Reçu le 20 septembre 1928.)

Über Wertverteilung bei rationalen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Von M. Fekete in Jerusalem.

1. Im ersten Bande dieser Acta habe ich eine kurze Note „Über Zwischenwerte bei komplexen Polynomen" veröffentlicht, wo ich den Fundamentalsatz über stetige Funktionen $f(x)$ der reellen Veränderlichen x — laut welchem diese jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$, $(f(a) \neq f(b))$ im Intervalle $a \leqq x \leqq b$, $(a < b)$ mindestens einmal annehmen — auf komplexe Polynome $P(z)$ übertrug. Später habe ich das Ergebnis der erwähnten Note auf verschiedene Weisen verschärft und verallgemeinert[1]) und auch Andere haben sich diesen Untersuchungen angeschlossen.[2]) Es ging darum: mit Hilfe der für die betrachteten Funktionen $P(z)$ charakteristischen Daten: Gradzahl oder Gliederanzahl möglichst-kleine Bereiche um die von einander verschiedenen, sonst beliebig vorgegebenen komplexen Punkte a und b abzugrenzen, wo jeder Wert γ „zwischen"[3]) $\alpha = P(a)$ und $\beta = P(b)$, oder, allgemeiner

[1]) M. Fekete, *a*) Analoga zu den Sätzen von Rolle und Bolzano für komplexe Polynome und Potenzreihen mit Lücken, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver.*, 32 (1923), S. 299—306.; *b*) Über Gebiete, in denen komplexe Polynome jeden Wert zwischen zwei gegebenen annehmen, *Math. Zeitschrift*, 22 (1925), S. 1—7.; *c*) Über die Nullstellenverteilung bei Polynomen, deren Wert an zwei Stellen gegeben ist, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver.*, 34 (1925), S. 220—233.; *d*) Über die Wurzelverteilung analytischer Funktionen, deren Wert an zwei Stellen gegeben ist, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver.*, 36 (1927), S. 216—222.

[2]) J. v. Sz. Nagy, Über einen Satz des Herrn M. Fekete, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver.*, 32 (1923), S. 307—309.; E. Bálint, Bemerkungen zu der Note „Analoga zu den Sätzen von Rolle und Bolzano..." des Herrn M. Fekete, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver.*, 34 (1925), S. 233—237.; B. Su, Note on a Theorem of Fekete, *Proceedings of the Imperial Academy* (of Japan), 3 (1927), S. 118—121.

[3]) Die komplexe Zahl r liegt *zwischen* den beiden komplexen Zahlen p und q, falls ihr Bildpunkt auf der komplexen Zahlenebene auf die Verbindungsstrecke der Bildpunkte von p und q fällt.

jeder Wert γ aus einer wohldefinierten Nachbarschaft von α und β mindestens einmal von $P(z)$ angenommen wird. Von allen diesbezüglichen Resultaten will ich hier einen von mir stammenden Satz anführen, welchen ich im Nachfolgenden — mutatis mutandis — auf rationale Funktionen von z verallgemeinern werde:

1. *„Sei $a \neq b$, sonst beliebig, $0 < \varphi \leqq \pi$. Sei $P(z)$ ein Polynom n-ten Grades ($n \geqq 1$), für welches $P(a) = \alpha$, $P(b) = \beta$, $\alpha \neq \beta$ ausfällt. Ist $\gamma \neq \alpha$ und $\neq \beta$, sonst irgendein komplexer Wert, wofür*[1]

$$(1) \qquad \left| \arg \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} \right| \geqq \varphi,$$

so nimmt $P(z)$ ihn mindestens in einem solchen Punkte c an, wofür

$$(2) \qquad \left| \arg \frac{c - a}{c - b} \right| \geqq \frac{\varphi}{n}$$

besteht."

2. Die Ungleichungen (1) bzw. (2) charakterisieren die Punkte γ bzw. c eines Kreisbogenzweieckes $K(\alpha, \beta; \varphi)$ bzw. $K\left(a, b; \frac{\varphi}{n}\right)$ mit den Eckpunkten α, β bzw. a, b, von dessen (von den Eckpunkten verschiedenen) Randpunkten aus die Strecke $\overline{\alpha\beta}$, bzw. $\overline{ab}$ unter den Winkel φ bzw. $\frac{\varphi}{n}$ erscheint. Ich werde zeigen, dass auch bei den rationalen Funktionen

$$R(z) = \frac{p_0 + p_1 z + \ldots + p_n z^n}{q_0 + q_1 z + \ldots + q_m z^m} = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei $(P(z), Q(z)) \sim 1$, $n \geqq 0$, $m \geqq 0$, $n + m \geqq 1$, $p_n \neq 0$, $q_m \neq 0$ ist, sich dem Kreisbogenzweieck $K(\alpha, \beta; \varphi)$ Kreisbogenzweiecke K zuordnen lassen, derart dass K nur von a, b, φ, m und n abhängt und dass es, sobald $R(a) = \alpha$, $R(b) = \beta$, $\alpha \neq \beta$ ist, zu jedem $\gamma \neq \alpha, \beta$ aus $K(\alpha, \beta; \varphi)$ mindestens ein c aus K mit $R(c) = \gamma$ gibt, vorausgesetzt, dass für sämtliche Werte z aus K $R(z)$ regulär bleibt: *es entspricht $\mathsf{K} = K\left(a, b; \frac{\varphi}{m + \mu}\right)$ den Anforderungen, wenn $\mu = \operatorname{Max}\{m, n\}$ ist.*

3. Die letzterwähnte Tatsache ist als spezieller Fall enthalten im Hauptresultat vorliegender Note, das ich im folgenden Satze formuliere:

---

[1]) Sei $z \neq 0$; dann ist $-\pi < \arg z \leqq \pi$.

II. *Es seien a und b von einander verschiedene, sonst beliebig vorgegebene komplexe Zahlen. Es seien n und m nichtnegative ganze Zahlen, derart, dass $\mu = \mathrm{Max}\{m, n\} \geqq 1$ ist. Es sei $0 < \varphi \leqq \pi$, $0 \leqq \psi \leqq \frac{\varphi}{\mu(m+\mu)}$. Ist $R(z)$ eine nichtreduzierbare rationale Funktion $\frac{P(z)}{Q(z)}$, deren Zähler $P(z)$ den genauen Grad n und deren Nenner $Q(z)$ den genauen Grad m hat und für welche $R(a) \neq R(b)$ ausfällt, so hat die Gleichung $R(z) = \gamma$ im (in Allgemeinen inbezug auf $\overline{ab}$ asymmetrischen) Kreisbogenzweieck*

$$\text{(3)} \qquad \arg\frac{z-b}{z-a} \geqq \frac{\varphi}{m+\mu} + m\psi, \quad \arg\frac{z-b}{z-a} \leqq -\frac{\varphi}{m+\mu} + \mu\psi$$

mindestens eine Wurzel, wenn nur $R(z)$ daselbst regulär ist und γ den Bedingungen

$$\text{(4)} \qquad \gamma \neq R(a),\ \gamma \neq R(b), \quad \left|\arg\frac{\gamma - R(b)}{\gamma - R(a)}\right| \geqq \varphi$$

genügt

4. Ist $m = 0$ und folglich $\mu = n$, so reduziert sich der Bereich (3) auf das Kreisbogenzweieck

$$\arg\frac{z-b}{z-a} \geqq \frac{\varphi}{n}, \quad \arg\frac{z-b}{z-a} \leqq -\frac{\varphi}{n} + n\psi, \quad \left(0 \leqq \psi \leqq \frac{\varphi}{n^2}\right),$$

das seinerseits das Kreisbogenzweieck $\left|\arg\frac{z-b}{z-a}\right| \geqq \frac{\varphi}{n}$ enthält, in welchem nach I. mindestens eine Wurzel von $R(z) = \gamma$ liegen muss, sobald γ den Bedingungen (4) genügt.

Beim Beweise von II. kann ich also annehmen, dass $m \geqq 1$ und $Q(z) = q_m \prod_{\varkappa=1}^{m} (z - d_\varkappa)$ ist, wobei entweder

$$\text{(5)} \qquad 0 \leqq \arg\frac{d_\varkappa - b}{d_\varkappa - a} < \frac{\varphi}{m+\mu} + m\psi,$$

oder

$$\text{(6)} \qquad 0 \geqq \arg\frac{d_\varkappa - b}{d_\varkappa - a} > -\frac{\varphi}{m+\mu} + \mu\psi$$

besteht und ich habe zu zeigen, dass

$$P(z) - \gamma Q(z) = S(z) = s_0 + \ldots + s_\nu z^\nu = s_\nu \prod_{\varkappa=1}^{\nu} (z - c_\varkappa), \quad s_\nu \neq 0$$

mindestens eine von seinen Nullstellen $c_\varkappa$ im Bereiche (3) hat.

(Leichtersichtlich ist $\nu \geqq 1$; denn wäre $P(z) - \gamma Q(z) = s_0$, so wäre entweder $n = 0$, $\gamma = 0$, oder aber $\gamma \neq 0$, $n = m$, d. h. jedenfalls $\mu = m$; ferner

$$\frac{\gamma - R(b)}{\gamma - R(a)} = \frac{P(b) - \gamma Q(b)}{P(a) - \gamma Q(a)} \cdot \frac{Q(a)}{Q(b)} = \frac{Q(a)}{Q(b)},$$

d. h., wegen (4),

$$\left|\arg \frac{Q(a)}{Q(b)}\right| \geqq \varphi,$$

also müsste, nach I., $Q(z) = 0$ in $K\left(a, b; \frac{\varphi}{m}\right)$ und folglich, wegen $0 \leqq \psi \leqq \frac{\varphi}{2m^2}$, auch im Bereiche (3) eine Wurzel haben, gegen (5) und (6).)

Was nun die obige Behauptung betreffs der Nullstellen $c_\varkappa$ belangt, folgt ihre Richtigkeit etwa so: würden sämtliche $c_\varkappa$ ausserhalb (3) liegen, d. h. wäre entweder

$$(7) \qquad 0 \leqq \arg \frac{c_\varkappa - b}{c_\varkappa - a} < \frac{\varphi}{m + \mu} + m\psi,$$

oder

$$(8) \qquad 0 \geqq \arg \frac{c_\varkappa - b}{c_\varkappa - a} > -\frac{\varphi}{m + \mu} + \mu\psi,$$

so wäre, (7), (8), (5) und (6) zufolge,

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu} \arg \frac{c_\varkappa - b}{c_\varkappa - a} + \sum_{\varkappa=1}^{m} \arg \frac{d_\varkappa - a}{d_\varkappa - b} < \frac{\nu + m}{\mu + m}\varphi + m(\nu - \mu)\psi \leqq \varphi,$$

und

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu} \arg \frac{c_\varkappa - b}{c_\varkappa - a} + \sum_{\varkappa=1}^{m} \arg \frac{d_\varkappa - a}{d_\varkappa - b} > -\frac{\nu + m}{\mu + m}\varphi + (\nu\mu - m^2)\psi \geqq -\varphi;$$

daher wäre

$$-\varphi < \arg \left\{ \prod_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{c_\varkappa - b}{c_\varkappa - a} \prod_{\varkappa=1}^{m} \frac{d_\varkappa - a}{d_\varkappa - b} \right\} < \varphi,$$

und das widerspricht der Tatsache

$$\frac{\gamma - R(b)}{\gamma - R(a)} = \frac{P(b) - \gamma Q(b)}{P(a) - \gamma Q(a)} \frac{Q(a)}{Q(b)} = \prod_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{c_\varkappa - b}{c_\varkappa - a} \prod_{\varkappa=1}^{m} \frac{d_\varkappa - a}{d_\varkappa - b},$$

wegen (4). W. z. b. w.

5. Im eben bewiesenen Satze II. habe ich das klassische Theorem von Bolzano über stetige Funktionen einer reellen Veränderlichen auf komplexe rationale Funktionen übertragen. Mein

Beweisverfahren ist mit wenigen Änderungen auch zu einer Übertragung des Rolleschen Theorems auf die genannte Funktionenklasse geeignet. In der Tat, die Frage nach der Lage der Nullstellen bei den Derivierten von rationalen Funktionen, welche an zwei vorgeschriebenen Stellen a, b $(a \neq b)$ gleiche Werte annehmen und zwischen a und b regulär sind, ist offenbar enthalten in der folgenden: Die rationale Funktion $R(z)$ befriedige die Bedingung

$$\int_a^b R(z)\,dz = 0 \tag{9}$$

($R(z)$ regulär auf der Integrationsstrecke $\overline{ab}$); wie sind dann ihre Nullstellen verteilt? Nun gibt, mit Hilfe des genannten Beweisverfahrens, folgender Satz eine Lösung letzterer Frage:

III. *Es sei* $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *eine rationale Funktion, deren Zähler* $P(z)$ *den genauen Grad* $n \geqq 0$ *und deren Nenner* $Q(z)$ *den genauen Grad* $m \geqq 0$ *hat und es sei* $m + n \geqq 1$. *Ist* $Q(z)$ *auf der Strecke von* a *bis* b *von Null verschieden und erfüllt* $R(z)$ *die Bedingung* (9), *wenn längs der genannten Strecke integriert wird, so verschwindet* $R(z)$ *im Kreisbogenzweieck* $K\left(a, b; \dfrac{\pi}{m+n}\right)$; *es sei denn, dass* $R(z)$ *daselbst einen Pol hat.*

6. Beim Beweise stütze ich mich auf folgenden, auch an und für sich interessanten

Hilfssatz[5]): *Es seien* b *und* $a \neq b$ *beliebige komplexe Zahlen,* $p(z)$ *ein Polynom vom genauen Grade* ν $(\nu \geqq 1)$, $f(z)$ *eine stetige Funktion der komplexen Veränderlichen* z, *die auf der Strecke* S *von* a *bis* b *der Bedingung* $f(z) \geqq 0$ *genügt und ein nicht verschwindendes Integral* $\int_a^b f(z)\,dz$ *liefert, falls längs* S *integriert wird. Es sei, bei Integration längs* S,

$$\int_a^b p(z) f(z)\,dz = 0. \tag{10}$$

Dann hat $p(z)$ *mindestens eine Nullstelle im Kreisbogenzweieck* $K\left(a, b; \dfrac{\pi}{\nu}\right)$.

[5]) Im Spezialfalle $f(z) \equiv 1$ ist dieser Hilfssatz in einem Satze des Verfassers enthalten. Vgl. a. a. O. [1]) *b*), S. 4., wo auch Litteraturangaben der behandelten Frage vorzufinden sind.

7. Um zunächst die Richtigkeit dieses Hilfssatzes zu beweisen, beschränke ich mich einfachheitshalber auf den speziellen Fall, wo $a=0$, $b=1$ ist. Dann kann ich die Existenz einer Nullstelle von $p(z)$ in $K\left(a, b; \frac{\pi}{\nu}\right)$ so folgern: Ich betrachte die Annäherungssummen:

$$(11) \quad \sigma_\varkappa = p(z_0)f(z_0)(z_1-z_0) + \\ + p(z_1)f(z_1)(z_2-z_1) + \ldots + p(z_{\varkappa-1})f(z_{\varkappa-1})(z_\varkappa - z_{\varkappa-1})$$

bzw.

$$(12) \quad \tau_\varkappa = f(z_0)(z_1-z_0) + f(z_1)(z_2-z_1) + \ldots + f(z_{\varkappa-1})(z_\varkappa - z_{\varkappa-1}) \\ (\varkappa = 2, 3, \ldots)$$

des integrals $\int_0^1 p(z)f(z)\,dz$ bzw. $\int_0^1 f(z)\,dz$, gebildet mit Hilfe der Punkte

$$(13) \qquad z_r = \frac{r}{\varkappa} \qquad (r = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1),$$

welche das Intervall von $z_0 = 0$ bis $z_\varkappa = 1$ in $\varkappa$ gleiche Strecken einteilen. Nach (10) konvergieren die $\sigma_\varkappa$, also wegen der Voraussetzung $\int_0^1 f(z)\,dz > 0$, auch die für $\varkappa \geqq \varkappa_0$ existierenden Quotienten $\frac{\sigma_\varkappa}{\tau_\varkappa}$ bei unbegrenzt wachsendem $\varkappa$ gegen 0. Ist also gezeigt, dass die Gleichung

$$(14) \qquad p(z) = \frac{\sigma_\varkappa}{\tau_\varkappa} \qquad (\varkappa \geqq \varkappa_0)$$

für jedes genügend grosse $\varkappa$ mindestens eine Wurzel im Kreisbogenzweieck $K\left(0, 1; \frac{\pi}{\nu}\right)$ besitzt, so folgt daraus aus Stetigkeitsgründen, dass daselbst auch $p(z) = 0$ eine Wurzel hat. Nun folgt für $\varkappa \geqq \varkappa_0$, nach (13), aus (11) und (12),

$$\frac{\sigma_\varkappa}{\tau_\varkappa} = \frac{\sum_{r=0}^{\varkappa-1} p(z_r)f(z_r)}{\sum_{r=0}^{\varkappa-1} f(z_r)},$$

also

$$\sum_{r=0}^{\varkappa-1}\left(p(z_r) - \frac{\sigma_\varkappa}{\tau_\varkappa}\right) f(z_r) = 0,$$

was sich, nach Einführung der Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\nu$ von (14), auch in der Form

$$(15)\quad (z_0-\zeta_1)(z_0-\zeta_2)\ldots(z_0-\zeta_\nu)f(z_0)+\ldots+ \\ +(z_{\varkappa-1}-\zeta_1)(z_{\varkappa-1}-\zeta_2)\ldots(z_{\varkappa-1}-\zeta_\nu)f(z_{\varkappa-1})=0$$

ausdrücken lässt. (15) ergibt sofort, dass, für $\varkappa \geqq \varkappa_0$, mindestens eine Wurzel von (14) im Innern von $K\left(0, 1; \frac{\pi}{\nu}\right)$ liegt. Wäre nämlich die Strecke $\overline{0, 1}$ aus jeder Wurzel ζ_s $(s=1, 2, \ldots, \nu)$ unter einem Winkel $\leqq \frac{\pi}{\nu}$ zu sehen, d. h. würde für jedes ζ_s eine der beiden Relationen

$$(16)\quad 0 \leqq \arg \frac{\zeta_s}{\zeta_s - 1} \leqq \frac{\pi}{\nu}$$

$$(17)\quad 0 \leqq \arg \frac{\zeta_s - 1}{\zeta_s} \leqq \frac{\pi}{\nu}$$

bestehen, so würde die Summe

$$f(z_0)\frac{(z_0-\zeta_1)\ldots(z_0-\zeta_p)}{(z_{\varkappa-1}-\zeta_1)\ldots(z_{\varkappa-1}-\zeta_p)}+ \\ +f(z_1)\frac{(z_1-\zeta_1)\ldots(z_1-\zeta_p)(z_1-\zeta_{p+1})\ldots(z_1-\zeta_\nu)}{(z_{\varkappa-1}-\zeta_1)\ldots(z_{\varkappa-1}-\zeta_p)(z_0-\zeta_{p+1})\ldots(z_0-\zeta_\nu)}+\ldots+ \\ +f(z_{\varkappa-1})\frac{(z_{\varkappa-1}-\zeta_{p+1})\ldots(z_{\varkappa-1}-\zeta_\nu)}{(z_0-\zeta_{p+1})\ldots(z_0-\zeta_\nu)},$$

— wobei $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ bzw. $\zeta_{p+1}, \ldots, \zeta_\nu$ die der Bedingung (16) bzw. (17) genügenden Wurzeln von (14) bezeichnen — offenbar nur solche nichtverschwindende Glieder enthalten, deren Argumente nicht kleiner, als 0 und kleiner, als π sind; andererseits für $\varkappa \geqq \varkappa_0$, wegen $\tau_\varkappa > 0$, können nicht alle $f(z_r)$, also auch nicht sämtliche Glieder der fraglichen Summe verschwinden. Deshalb wäre diese Summe von 0 verschieden, im Widerspruche zu (15).

8. Aus dem eben Bewiesenen folgt Satz III. für $a=0$, $b=1$ einfach so:

Es sei $\overline{Q}(z)=\overline{q}_0+\ldots+\overline{q}_m z^m$ dasjenige Polynom, das aus $Q(z)=q_0+\ldots+q_m z^m$ durch Übergang zu den konjugiert komplexen Koeffizienten $\overline{q}_0, \ldots, \overline{q}_m$ hervorgeht. Dann ist die Bedingung (9) mit

$$\int_0^1 \frac{P(z)\,\overline{Q}(z)}{Q(z)\,\overline{Q}(z)}\,dz = \int_0^1 P(z)\,\overline{Q}(z)\,\frac{1}{|Q(z)|^2}\,dz = 0$$

gleichbedeutend, also muss nach dem Hilfssatz die Gleichung

$$P(z)\,\overline{Q}(z)=0$$

im Kreisbogenzweiecke $K\left(0,\,1\,;\,\frac{\pi}{m+n}\right)$ mindestens eine Wurzel haben; folglich verschwindet daselbst auch entweder $P(z)$, oder $\overline{Q}(z)$ und somit $Q(z)$ mindestens einmal. Die allgemeine Gültigkeit von Satz III. erhält man auf Grund des jetzt bewiesenen Spezialfalles mit Hilfe von Koordinatentransformation.

9. Zum Schlusse meiner Betrachtungen will ich hier noch eine Verallgemeinerung des Satzes III. herleiten, die sich auf Grund des obigen Hilfssatzes sofort beweisen lässt:

IV. *Es sei* $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ *eine rationale Funktion, deren Zähler* $P(z)$ *den genauen Grad* $n\geqq 0$ *und deren Nenner* $Q(z)$ *den genauen Grad* $m\geqq 0$ *hat und es sei* $m+n=\nu\geqq 1$. *Ist* $Q(z)$ *auf der Strecke von* 0 *bis* 1 *von Null verschieden und erfüllt* $R(z)$, *bei Integration längs dieser Strecke, die Bedingungen:*

$$\int_0^1 R(z)\,z^r\,dz=0,\quad r=0,\ldots,\mu-1,$$

wobei $1\leqq\mu\leqq\nu$ *ist, so ist die Gesamtanzahl der Nullstellen und Pole von* $R(z)$, *die im Kreisbogenzweieck* $K\left(0,\,1\,;\frac{\pi}{m+n}\right)$ *liegen, mindestens* μ.

Satz IV. ist im Falle $\mu=1$ mit Satz III. identisch. Für $\mu=2$ folgt seine Richtigkeit etwa so: Aus den Bedingungen

$$\int_0^1 R(z)\,dz=0,\quad \int_0^1 R(z)\,z\,dz=0,$$

die auch in der Form

$$\int_0^1 \frac{P(z)\,\overline{Q}(z)}{|Q(z)|^2}\,dz=0,\quad \int_0^1 \frac{P(z)\,\overline{Q}(z)}{|Q(z)|^2}\,z\,dz=0$$

geschrieben werden können, folgt bei jedem α

$$\int_0^1 \frac{P(z)\,\overline{Q}(z)\,(z-\overline{\alpha})}{|Q(z)|^2}\,dz=0. \tag{18}$$

Ist nun α eine, nach Satz III. sicherlich existierende Wurzel von

$P(z)\bar{Q}(z)=0$ im Kreisbogenzweieck $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n}\right)$, so kann man (18) auch auf die Form

$$\int_0^1 \frac{P(z)\bar{Q}(z)}{z-\alpha}\frac{(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})}{|Q(z)|^2}dz=\int_0^1 \frac{P(z)\bar{Q}(z)}{z-\alpha}\left|\frac{z-\alpha}{Q(z)}\right|^2 dz=0$$

bringen, woraus sich nach unserem Hilfssatze die Existenz einer Wurzel der Gleichung

$$\frac{P(z)\bar{Q}(z)}{z-\alpha}=0$$

im Kreisbogenzweieck $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-1}\right)$ ergibt; folglich muss in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n}\right)$ $P(z)\bar{Q}(z)=0$ und deshalb auch $P(z)\,Q(z)=0$ mindestens zwei Wurzeln besitzen, wie behauptet wurde. Es ist bemerkenswert, das nach dem Vorangehenden mindestens eine von diesen Wurzeln bereits in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-1}\right)$ enthalten ist.

Die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes für beliebiges $2<\mu\leqq m+n$ erkennt man mit Hilfe von vollständiger Induktion, durch ähnlichen Gedankengang, wie der eben angewandte; er liefert sogar (wie im Spezialfalle $\mu=2$) auch eine Verschärfung des Satzes IV., wonach *eine Wurzel von* $P(z)\,Q(z)=0$ *schon in* $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-\mu+1}\right)$, *zwei Wurzeln in* $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-\mu+2}\right)$, ..., r *Wurzeln in* $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-\mu+r}\right)$, ..., μ *Wurzeln in* $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n}\right)$ *enthalten sein müssen.*

In der Tat, seien die „Momente" $M_r=\int_0^1 R(z)z^r\,dz$ von $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ für $r=0, 1, \ldots, \mu-1$ gleich 0 und setzen wir als richtig voraus, dass das Verschwinden von $M_0, M_1, \ldots, M_{\mu-2}$ die Existenz von $\mu-1$ solcher Wurzeln der Gleichung $P(z)\,Q(z)=0$ nach sich zieht, welche sämtlich in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n}\right)$ enthalten sind, während $\mu-2$ von ihnen bereits in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-1}\right)$; $\mu-3$ von ihnen in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-2}\right), \ldots,$ 1 von ihnen in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-\mu+2}\right)$ liegt. Dann hat auch $P(z)\bar{Q}(z)=0$ $\mu-1$ Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu-1}$ in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n}\right)$ und aus

$$M_0 = M_1 = \ldots = M_{\mu-1} = 0$$

folgt

$$\int_0^1 \frac{P(z)}{Q(z)}(z-\bar{\alpha}_1)(z-\bar{\alpha}_2)\ldots(z-\bar{\alpha}_{\mu-1})\,dz =$$

$$\int_0^1 \frac{P(z)\bar{Q}(z)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_{\mu-1})} \frac{|z-\alpha_1|^2\,|z-\alpha_2|^2\ldots|z-\alpha_{\mu-1}|^2}{|Q(z)|^2}\,dz = 0,$$

was nach dem obigen Hilfssatze die Existenz einer Wurzel von

$$\frac{P(z)\bar{Q}(z)}{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{\mu-1})} = 0$$

in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-\mu+1}\right)$ involviert; daher hat $P(z)\bar{Q}(z)=0$ und somit auch $P(z)Q(z)=0$ μ Wurzeln in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n}\right)$, von denen mindestens 1 in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-\mu+1}\right)$, mindestens 2 in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-\mu+2}\right), \ldots$ liegt, wie behauptet wurde. Damit ist die für das Verschwinden von $\mu-1$ Momenten richtig vorausgesetzte Aussage auch für das Verschwinden von μ Momenten als richtig erwiesen.

Die dem Satze IV. entsprechende Verallgemeinerung des Satzes III. für beliebige a und b (auch in ihrer verschärften Form) kann der Leser leicht selbst finden.

Jerusalem, 31. März, 1929. Mathematisches Institut der hebräischen Universität.

(*Eingegangen am 10. April 1929.*)

Bemerkung zur Algebra.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

Die folgenden Zeilen enthalten eine einfache Beweisanordnung für die LOEWYschen Reziprozitätssätze, welche in seiner Arbeit: Über die Reduktion algebraischer Gleichungen durch Adjunktion insbesondere reeller Radikale[1]) gegeben sind.

Seitdem ist eine wichtige Arbeit von T. TAKAGI[2]) erschienen, welche den zweiten Reziprozitätssatz vertieft. Die Beweisführung des TAKAGIschen Satzes wendet den ABELschen Fundamentalsatz an, die LOEWYschen Sätze sind von diesem unabhängig.

1. Es seien im Rationalitätsbereiche P zwei irreduzible Gleichungen:

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_a)$$
$$\varphi(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_b)$$

gegeben. Zwei beliebige der Wurzeln α_i, β_j sollen durch α, β bezeichnet werden, ferner zerfalle im Bereiche (P, β) das Polynom $f(x)$ in irreduzible Faktoren, wie folgt

$$f(x) = f_1(x;\beta)\dots f_k(x;\beta). \tag{1}$$

2. Wir beweisen, dass im Rationalitätsbereiche (P, α) das Polynom $\varphi(x)$ in das Produkt von k irreduziblen Faktoren zerfällt, also ist

$$\varphi(x) = \varphi_1(\alpha;x)\dots\varphi_k(\alpha;x). \tag{2}$$

Da $\prod\limits_{j=1}^{b} f_l(x;\beta_j)$ eine Potenz von $f(x)$ bildet, besitzt jede Gleichung

$$f_l(\alpha;x) = 0 \qquad (l = 1, 2, \dots, k)$$

---

[1]) *Math. Zeitschrift*, 15 (1922), S. 261—273. Vgl. noch Fr. K. SCHMIDT, Verallgemeinerung eines von Herrn A. LOEWY stammenden Reziprozitätssatzes für algebraische Gleichungen, *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften*, 1925, 5. Abh., S. 19—26.

[2]) On the mutual reduction of algebraic equations, *Proceedings of the Imperial Academy* (of Japan), 2 (1926), S. 41—42.

eine gemeinsame Wurzel mit der Gleichung $\varphi(x)=0$. Sei der grösste gemeinsame Teiler

$$(f_l(\alpha\,;x),\ \varphi(x))=\psi_l(\alpha\,;x) \qquad (l=1,2,\ldots,k).$$

Die grössten gemeinsamen Teiler sind relativ prim gegen einander, denn im Falle $l\neq k$ kann nicht

$$f_l(\alpha\,;\beta_\mu)=f_k(\alpha\,;\beta_\mu)=0$$

ausfallen, da

$$f(x)=f_1(x\,;\beta_\mu)\ldots f_k(x\,;\beta_\mu)$$

ist. Infolgedessen ist die Anzahl der irreduziblen Faktoren von $\varphi(x)$ nicht kleiner als k. Da f und φ beim Beweise vertauschbar sind, ergibt sich die Anzahl gleich k. Die Bezeichnung kann so gewählt werden, dass

$$\psi_l(\alpha\,;x)=\varphi_l(\alpha\,;x)$$

ausfällt.

3. Man kann zeigen, dass

$$(\varphi_l(x\,;\beta),\ f(x))=f_l(x\,;\beta)$$

ist. Denn es sei z. B. $\varphi_l(\alpha\,;\beta_j)=0$, dann folgt $f_l(\alpha\,;\beta_j)=0$, also ist $f_l(x\,;\beta_j)$ teilbar durch $(\varphi_l(x\,;\beta_j),\ f(x))$. Da $f_l(x\,;\beta_j)$ irreduzibel in (P,β_j) ist und $(\varphi_l(x\,;\beta_j),f(x))$ mindestens vom ersten Grade ist, wird

$$(\varphi_l(x\,;\beta_j),f(x))=f_l(x\,;\beta_j),$$
$$(\varphi_l(x\,;\beta),\ f(x))=f_l(x\,;\beta).$$

4. Sind die Grade der irreduziblen Faktoren in (1) und (2)

(3) $$a_1,a_2,\ldots,a_k;\qquad b_1,b_2,\ldots,b_k,$$

so bestehen die Relationen

(3*) $$\frac{a_l}{b_l}=\frac{a}{b} \qquad (l=1,2,\ldots,k).$$

Zu diesem Zwecke muss nur die Gleichung

(4) $$f(x)^{b_l}=f_l(x\,;\beta_1)\ldots f_l(x\,;\beta_b)$$

bewiesen werden. Dies is aber richtig, weil z. B. α_i als Wurzel der Gleichung $f(x)^{b_l}=0$ die Multiplizität b_l besitzt und genau dieselbe Multiplizität weist α_i als Wurzel der Gleichung

$$f_l(x\,;\beta_1)\ldots f_l(x\,;\beta_b)=0$$

auf, q. e. d.

(Eingegangen am 21. April 1929.)

Über einen topologischen Satz.

Von JULIUS v. SZ. NAGY in Szeged.

1. Es sei C eine orientierte geschlossene Kurve auf einer Fläche. Die Kurve C scheidet sich in n Doppelpunkten, sie kann aber noch Doppelpunkte und andere mehrfache Punkte haben.

Die Kurve C lässt sich in einem ihrer n Doppelpunkte auf zweierlei Art aufscheiden, je nachdem sie orientiert bleibt oder nicht. Das Aufschneiden des Doppelpunktes, oder der *Aufschnitt* des Doppelpunktes wird im ersten Falle *Durchschnitt*, im zweiten aber *Querschnitt* genannt. Die zwei Aufschnitte in einem Doppelpunkte werden *komplementäre Aufschnitte* genannt.

Es ist klar, dass die Kurve C durch den Durchschnitt eines ihrer Doppelpunkte in zwei Kurven zerfällt. Die Kurve C bleibt aber eine Kurve nach dem Querschnitte eines ihrer Doppelpunkte.

Wir werden den folgenden Satz beweisen:

I. *Ist k bzw. h die Anzahl der Kurven, in welche die Kurve C durch gewisse Aufschnitte ihrer n Doppelpunkte bzw. durch die komplementären dieser Aufschnitte zerteilt wird, so besteht die Gleichung*

$$k+h=n+2-2r,$$

wo r eine nichtnegative ganze Zahl ist.

2. Zerfällt die Kurve C durch gewisse Aufschnitte der n Doppelpunkte in k geschlossene Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_k$ und wendet man in einem der n Doppelpunkte, wo zwei der Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_k$ durch den angenommenen Aufschnitt von einander getrennt wurden, den komplementären Aufschnitt an, so werden die betreffenden zwei Kurven dadurch in eine Kurve vereinigt. Setzt man dieses Verfahren für die so erhaltenen $k-1$ Kurven fort, so erhält man durch die komplementären der entsprechenden $k-1$ Aufschnitte und durch die übrigen $n-k+1$ Aufschnitte aus der Kurve C eine einzige Kurve C'.

Einer der entsprechenden $n-k+1$ komplementären Aufschnitte vermehrt oder verkleinert die Anzahl der Kurven, je nachdem er zwei Punkte einer Kurve oder je einen Punkt von zwei Kurven verbindet.

Ist q bzw. r die Anzahl derjenigen der $n-k+1$ komplementären Aufschnitte, von denen die Anzahl der Kurven vergrössert oder verkleinert wird, so bestehen die Gleichungen:

$$q+r=n-k+1 \text{ und } h=1+q-r.$$

Aus diesen Gleichungen folgen die Gleichungen

$$k+h=n+2-2r \text{ und } h-k=2q-n.$$

Damit ist der Satz I bewiesen.

3. Hat die Kurve C ausserhalb ihrer n Doppelpunkte keine mehrfachen Punkte, so bildet sie mit ihren n Doppelpunkten einen aus $2n$ Strecken bestehenden regulären Streckenkomplex, weil von jedem Punkte des Komplexes (von den Doppelpunkten von C) vier Strecken ausgehen.

Wir verstehen unter den *Zykeln* dieser orientierten Kurve die orientierten einfachen Kurven, in welche die Kurve C durch die Durchschnitte ihrer Doppelpunkte zerlegt werden kann. Die einfachen Kurven (ohne Doppelpunkte), in welche die Kurve C durch die Querschnitte ihrer Doppelpunkte zerlegt werden kann, werden *Antizykel* genannt.

Die Orientierung auf je zwei aufeinanderfolgenden Strecken eines Antizykels ist verschieden. Daraus folgt, dass jeder Antizykel aus einer geraden Anzahl der Strecken der Kurve C gebildet wird.

Aus dem Satze I. folgt der Satz:

II. *Ist z bzw. a die Anzahl der Zykel bzw. Antizykel einer Kurve C, die ausserhalb n Doppelpunkte keine weiteren mehrfachen Punkte hat, so besteht die Gleichung*

$$z+a=n+2-2r,$$

wo r eine nichtnegative ganze Zahl ist.

(*Eingegangen am 14. Mai 1929.*)

Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie.

Von László Kalmár in Szeged.

1. Unter dem Entscheidungsproblem (erster Stufe) der mathematischen Logik versteht man Folgendes: Es ist ein Verfahren anzugeben, welches ermöglicht, von einem beliebigen Zählausdruck zu entscheiden, ob es einen Individuenbereich gibt, wo derselbe erfüllbar ist. Dabei versteht man nach Löwenheim[1]) unter einem Zählausdruck einen aus veränderlichen logischen Funktionen[2]) mit Hilfe logischer Operatoren[3]) und (sich ausschliesslich auf Individuenvariable beziehenden) Quantifikatoren[4]) zusammengesetzten

[1]) L. Löwenheim, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Math. Annalen*, **76** (1915), S. 447—470.

[2]) d. h. in einer beliebigen Menge $\mathfrak{J}$ (Individuenbereich) definierten Funktionen (von einer oder mehreren Veränderlichen), welche zwei bestimmte Werte anzunehmen fähig sind. Diese beiden Werte, welche man logische Werte („wahr" und „falsch") nennt, bezeichne ich (statt den Behmannschen, γ und λ ähnlichen Zeichen aus drucktechnischen Gründen) mit $\uparrow$ bzw. $\downarrow$.

[3]) d. h. Funktionen (beliebig vieler Veränderlichen), deren Argumente und Funktionswerte logische Werte sind. Beispiele: die Negation $(\overline{p})$, die Konjuktion $(p\,\&\,q)$ und die Implikation $(p\rightarrow q)$, welche üblicherweise durch ihre „Einmaleinstabellen":

$$\overline{\uparrow}=\downarrow,\ \overline{\downarrow}=\uparrow;$$
$$\uparrow\&\uparrow=\uparrow,\ \uparrow\&\downarrow=\downarrow,\ \downarrow\&\uparrow=\downarrow,\ \downarrow\&\downarrow=\downarrow;$$
$$\uparrow\rightarrow\uparrow=\uparrow,\ \uparrow\rightarrow\downarrow=\downarrow,\ \downarrow\rightarrow\uparrow=\uparrow,\ \downarrow\rightarrow\downarrow=\uparrow$$

definiert werden. Von der bekannten Tatsache, dass sich jeder logische Operator mit Hilfe von $^{-}$ und & (oder aber mit Hilfe von $^{-}$ und $\rightarrow$) ausdrücken lässt, mache ich keinen Gebrauch. — Betreffend der hier angewandten Auffassung des „Aussagenkalküls" als Arithmetik einer Menge $\{\uparrow,\downarrow\}$ mit zwei Elementen vgl. J. Lukasiewicz, Über den Aussagenkalkül, erscheint in den *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna.*

[4]) Die Quantifikatoren, (x) („für alle x") und (Ex) („es gibt ein x, für welche"), erzeugen aus einer (eventuell auch von anderen Parametern als x abhängigen) logischen Funktion $F(x)$ einen von x unabhängigen logischen

Ausdruck, der keine freie (d. h. nichtgebundene) Individuenvariable enthält, also einen nur vom Individuenbereich und von der Wahl der veränderlichen Funktionen abhängigen logischen Wert repräsentiert. Ein Zählausdruck $\mathfrak{A}$ heisst in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ erfüllbar, wenn es in $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktionen gibt, welche in $\mathfrak{A}$ für die entsprechenden Funktionsvariablen eingesetzt, die Gleichung $\mathfrak{A} = \uparrow$ erfüllen.

2. Das Entscheidungsproblem, in obiger Fassung, enthält als Spezialfall die Frage nach der Widerspruchsfreiheit eines beliebigen Axiomensystems, also auch die Frage nach der Beweisbarkeit eines beliebigen Satzes in irgendeinem Axiomensystem. Man bezeichnet aber häufig auch ein allgemeineres Problem als Entscheidungsproblem, welches sich vom obigen dadurch unterscheidet, dass in den Zählausdrücken auch ein Funktionszeichen $I(x, y)$ vorkommen kann, welches keine variable Funktion bezeichnet, sondern die konstante „Identitätsfunktion", welche $= \uparrow$ oder $\downarrow$ ist, je nachdem x und y dieselben Elemente von $\mathfrak{J}$ sind oder nicht.

In dieser weiteren Fassung wird das Entscheidungsproblem in der oben angeführten Arbeit von Löwenheim behandelt. Unter anderen wichtigen Beiträgen zur Lösung des Entscheidungsproblems wird dortselbst gezeigt, dass es genügen würde, das Entscheidungsproblem für binäre Zählausdrücke zu lösen, d. h. für solche, in denen keine logischen Funktionen von mehr als zwei Argumenten vorkommen. Löwenheim konstruiert nämlich zu jedem Zählausdruck $\mathfrak{A}$ einen binären $\mathfrak{B}$ von der Beschaffenheit, dass $\mathfrak{A}$ dann und nur dann in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ erfüllbar ist, wenn $\mathfrak{B}$ in einem gewissen anderen Individuenbereich $\mathfrak{K}$ es ist. Nun kommt aber in $\mathfrak{B}$ die konstante Identitätsfunktion $I(x, y)$ vor, selbst auch dann, falls $\mathfrak{A}$ — wie im Folgenden vorausgesetzt wird — dieselbe ursprünglich nicht enthalten hat.

3. Um nun die Löwenheimsche Reduktion des Entscheidungsproblems auf den Fall binärer Zählausdrücken auch bei der engeren, für die Anwendungen auf axiomatische Fragen wichtigeren Fassung desselben zu ermöglichen, werde ich nun zeigen, dass zu jedem binären Zählausdruck $\mathfrak{B}$ ein ebenfalls binärer Zählaus-

---

Wert: es ist nämlich $(x) F(x) = \uparrow$ oder $\downarrow$, je nachdem $F(x)$ für x in $\mathfrak{J}$ konstant $= \uparrow$ ist oder nicht, ferner $(Ex) F(x) = \downarrow$ oder $\uparrow$, je nachdem $F(x)$ für x in $\mathfrak{J}$ konstant $= \downarrow$ ist oder nicht. Die in $F(x)$ figurierende Individuenvariable x wird also durch die Quantifikatoren (x) bzw. (Ex) „gebunden".

druck $\mathfrak{E}$ konstruiert werden kann derart, dass in $\mathfrak{E}$ die konstante Identitätsfunktion nicht vorkommt, ferner, dass falls $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{K}$ erfüllbar ist, so ist es auch $\mathfrak{E}$ in einem gewissen Individuenbereich $\mathfrak{L}$ und umgekehrt.

Zu diesem Zweck fasse ich das Zeichen $I(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ ebenfalls als eine Funktionsvariable auf; ferner bilde ich zu jeder in $\mathfrak{B}$ vorkommenden Funktion eines Argumentes $F(x)$ bzw. zweier Argumenten $F(x, y)$ (auch $I(x, y)$ mitgerechnet) den Zählausdruck

$$(1) \qquad (x)(y)((I(x, y) \& F(x)) \to F(y))$$

bzw. die beiden Zählausdrücke

$$(2) \qquad (x)(y)(z)((I(x, y) \& F(x, z)) \to F(y, z)),$$

$$(3) \qquad (x)(y)(z)((I(x, y) \& F(z, x)) \to F(z, y)).$$

Die Konjunktion aller dieser Ausdrücken bezeichne ich mit $\mathfrak{C}$, den Zählausdruck

$$(x) I(x, x)$$

mit $\mathfrak{D}$; endlich sei

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{B} \& \mathfrak{C} \& \mathfrak{D}.$$

Ist nun $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{K}$ in dem Sinne erfüllbar, dass statt I die Identitätsfunktion eingesetzt wird, so ist auch $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{K}$ erfüllbar, nämlich durch dieselbe Einsetzungen der Funktionsvariablen; es haben ja $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$, wenn statt I die Identitätsfunktion eingesetzt wird, den Wert $\dagger$. Ist umgekehrt $\mathfrak{E}$ in einem Individuenbereich $\mathfrak{L}$ erfüllbar, hat also $\mathfrak{E}$ bei einer bestimmten Einsetzung der Funktionsvariablen den Wert $\dagger$, so zerfällt $\mathfrak{L}$ — da

$$(x) I(x, x)$$

und

$$(x)(y)(z) ((I(x, y) \& I(x, z)) \to I(y, z))$$

als Konjunktionsglieder von $\mathfrak{E}$, den Wert $\dagger$ haben — in Klassen derart, dass zwei Elemente x und y von $\mathfrak{L}$ dann und nur dann zur selben Klasse gehören, wenn $I(x, y) = \dagger$ ist. Ist nun $F(x)$ bzw. $F(x, y)$ eine in $\mathfrak{E}$ vorkommende Funktion, so haben (1) bzw. (2) und (3), als Konjunktionsglieder von $\mathfrak{E}$, den Wert $\dagger$; daher hängt der Wert von $F(x)$ bzw. $F(x, y)$ nur von der Klasse α bzw. von den Klassen α und β ab, denen x bzw. x und y angehören. Bezeichnet man diesen Wert mit $F(\alpha)$ bzw. $F(\alpha, \beta)$, so hat man im Bereich $\mathfrak{K}$ der Klassen Funktionen definiert, welche die Gleichung $\mathfrak{E} = \dagger$ erfüllen, wobei $\mathfrak{K}$ als Individuenbereich zu betrachten ist. Da $\mathfrak{B}$ ein Konjunktionsglied von $\mathfrak{C}$ ist, erfüllen diese Funktionen auch die Gleichung $\mathfrak{B} = \mathfrak{t}$; und zwar ist $I(\alpha, \beta)$ eben die Identitätsfunktion in $\mathfrak{K}$.

4. Eine Verschärfung des Entscheidungsproblems ist Folgendes[5]): Es ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, dass ein Zählausdruck $\mathfrak{A}$ in einem Individuenbereich erfüllbar sei. Kommt in $\mathfrak{A}$ die Identitätsfunktion nicht vor, so kommt dies, wie es Bernays und Schönfinkel (a. a. O, S. 344 f.) gezeigt haben, darauf hinaus, die minimale Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ derjenigen Individuenbereiche $\mathfrak{J}$ zu bestimmen, in denen $\mathfrak{A}$ erfüllbar ist (wenn es solche $\mathfrak{J}$ überhaupt gibt): dann ist $\mathfrak{A}$ in einem Individuenbereich dann und nur dann erfüllbar, wenn seine Mächtigkeit $\geqq \mathfrak{m}$ ist. Kommt aber in $\mathfrak{A}$ auch die Identitätsfunktion vor, so ist dieser Satz im allgemeinen ungültig, so dass zur Lösung des verschärften Entscheidungsproblems die Bestimmung der erwähnten Minimalmächtigkeit nicht mehr genügt. Z. B. ist der Zählausdruck

$$(Ex)(y)\ I(x, y),$$

wo I die Identitätsfunktion bezeichnet, erfüllbar in $\mathfrak{J}$, wenn dieser Individuenbereich genau ein Element besitzt, sonst aber nicht.

Trotzdem ist für die Anwendung auf die Löwenheimsche Reduktion die Bemerkung vom Nutzen, dass die zu den Zählausdrücken $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gehörigen Minimalmächtigkeiten gleich sind. In der Tat, ist $\mathfrak{L}$ der Individuenbereich von der Minimalmächtigkeit $\mathfrak{m}$, wo $\mathfrak{C}$ erfüllbar ist, so ist nach dem Vorangehenden auch $\mathfrak{B}$ in keinem Individuenbereich von kleinerer Mächtigkeit erfüllbar, wohl aber im oben konstruierten $\mathfrak{K}$, dessen Mächtigkeit $\leqq \mathfrak{m}$ ist.

Beachtet man nun, dass bei der Löwenheimschen Reduktion die Mächtigkeiten von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ monoton nichtabnehmend voneinander abhängen, so hat man zur Lösung des verschärften Entscheidungsproblems die zu $\mathfrak{B}$ gehörige Minimalmächtigkeit zu bestimmen, was mit Rücksicht auf die vorangehende Bemerkung soeben auf das entsprechende Problem über binäre Zählausdrücke zurückgeführt wurde.

5. Ich deute noch eine geringe Vereinfachung der erwähnten Löwenheimschen Konstruktion des Individuenbereiches $\mathfrak{K}$ an. Es

[5]) Vgl. P. Bernays und M. Schönfinkel, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, **99** (1928), S. 342—372., insbesondere S. 344.

sei n die Höchstanzahl der Argumente der in $\mathfrak{A}$ vorkommenden Funktionsvariablen; man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzten, dass jede in $\mathfrak{A}$ vorkommende Funktionsvariable genau n Argumente besitzt. Löwenheim erreicht nun eine schrittweise Reduktion der Anzahl n durch Einführung der Menge aller geordneten Paare von Elementen des Individuenbereiches als neuen Individuenbereich. Am Ende seiner Arbeit erwähnt er, dass man z. B. im Falle $n=6$ analog auch mit Triaden von Elementen des Individuenbereiches operieren kann. Nun hindert es nichts, $\mathfrak{K}$ als Menge der geordneten n-aden aus Elementen von $\mathfrak{J}$ zu definieren, wodurch die Reduktion in einem Schritte erreicht wird; zugleich erspart man Diskussionen der Fälle in Bezug auf die Gleichheit von Argumenten einer Funktion Aus den in $\mathfrak{A}$ ursprünglich vorkommenden veränderlichen Funktionen werden in $\mathfrak{B}$ lauter Funktionen eines Argumentes; die in $\mathfrak{B}$ vorkommenden Funktionen zweier Argumenten sind die Identitätsfunktion, sowie die n, den Löwenheimschen V und H analogen Hilfsfunktionen.

(*Eingegangen am 4. Oktober 1929.*)

Bibliographie.

F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, dritter Band, 3. Auflage (Grundlehren der math. Wissenschaften XVI), X + 238 S., Berlin, J. Springer, 1928.

Das vorliegende dritte Band von KLEIN's Elementarmathematik enthält die erste Vorlesung, die er über diesen Gegenstand gehalten hat. Während in den beiden ersten Bänden (vgl. die Besprechungen in Band 2., S. 127 und 257. *dieser Acta*) diejenige Teile der Mathematik, mit denen man gewöhnlich rechnet — Arithmetik, Algebra, Analysis, Mengenlehre, Geometrie — behandelt wurden, so wird man in diesem Band in ein Gebiet eingeführt, das sonst nur selten zur Darstellung kommt. Der grundlegende Gedanke KLEIN's, „die mathematische Wissenschaft als ein zusammengehöriges Ganzes nach allen Seiten wieder zur Geltung zu bringen,... insbesondere aber zu erreichen, dass zwischen den Vertretern der abstrakten und der angewandten Mathematik wieder mehr gegenseitiges Verständnis Platz greife, als augenblicklich besteht", kommt hier zur Ausführung.

Im ersten Teil, der von der geometrischen Darstellung reeller Funktionen handelt, wird der Leser mit der unbestreitbaren Tatsache vertraulich gemacht, dass es zwei verschiedene Arten von Mathematik gibt, eine abstrake „Präzisionsmathematik" und eine praktische „Approximationsmathematik". Die Beherrschung der Approximationsmathematik mit Hilfe der Präzisionsmathematik und die Verwendung der Approximationsmathematik zur Beschreibung der Präzisionsmathematik bilden dann den eigentlichen Gegenstand des Buches. Im zweiten Teil wird von diesem Gesichtspunkte aus die Geometrie der ebenen Kurven behandelt. Ein dritter Teil handelt von der Versinnlichung idealer Gebilde durch Zeichnungen und Modelle.

Es ist zu erwarten, dass diese bisher nur in Autographie vorhandenen Vorlesungen KLEIN's, die seine grundlegenden Gedanken so klar ausdrücken, von nun an dieselbe Verbreitung wie die beiden ersten Bände finden werden.

Börge Jessen.

G. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, 4. Auflage, V + 417 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1928.

Die wesentliche Abweichung dieser vierten Auflage des wohlbekannten Lehrbuches von den Vorhergehenden besteht in einem elfseitigen Anhange über FREDHOLMsche Determinanten und Integralgleichungen. Trotz der musterhaften Darstellung ist es leider zu befürchten, dass der Leser, der noch nichts über Differentialgleichungen, unendliche Determinanten und andere angrenzende Problemkreise gehört hat, die Tiefe der FREDHOLMschen Ideen nicht nach ihrem wahren Werte einschätzen wird.

F. R.

L. Bieberbach, Vorlesungen über Algebra, unter Benutzung der dritten Auflage des gleichnamigen Werkes von G. BAUER in vierter vermehrter Auflage dargestellt, X + 334 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1928.

Dieses moderne Lehrbuch der elementaren Algebra ist unter Benutzung der dritten Auflage des Werkes von G. BAUER entstanden. Im Mittelpunkt der Darstellung stehen die algebraischen Gleichungen. Das Buch beginnt mit Entwicklungen über die grundlegenden Eigenschaften der algebraischen Gleichungen. Entsprechend der Tendenz des Verfassers wird unter Anderen der Fundamentalsatz der Algebra auch mit Hilfe des ROUCHÉschen Satzes (also funktionentheoretisch) bewiesen. Die axiomatisch einsetzende Behandlung der Determinanten dürfte den Anfängern Schwierigkeiten verursachen. Die quadratischen Formen werden sehr ausgiebig behandelt. Der Abschnitt über numerische Auflösung der Gleichungen enthält auch einige der neueren Ergebnissen der numerischen Algebra, z. B. das Verfahren zur Bestimmung der Anzahl der Nullstellen einer Gleichung in einem Kreise. Im Kapitel „Sätze über die Lage der Gleichungswurzeln“ hätten vielleicht auch die bezüglichen Sätze von CAUCHY, BIRKHOFF, FEKETE, ... Platz finden können. Es sei noch erwähnt, dass — wie in der Einleitung bemerkt — die Substitutionsgruppen und die GALOISsche Theorie in Anschluss an PERRON dargelegt sind.

Das Buch trägt die persönliche Marke von BIEBERBACH; der Leser erkennt, wie ein Funktionentheoretiker die Algebra behandelt. An einigen Stellen stehen interessante historische und literarische Hinweise. Die lebhafte, leicht fliessende und meisterhafte Darstellung gibt dem Buch einen besonders hohen Wert.

St. Lipka.

Otto Hölder, Die Arithmetik in strenger Begründung, zweite Auflage, V + 73 S., Berlin, J. Springer, 1929.

Der Verfasser lehnt sowohl die formalistische Begründung der Arithmetik, als „überflüssig und im Grunde widerspruchsvoll“, wie auch den intuitionistischen Standpunkt, deren „einzige . . . Wirkung ist die, dass Nichtmathematiker nunmehr glauben, mit Behagen darauf hinweisen zu dürfen, dass auch unsere, früher für vollständig strenge gehaltene Wissenschaft in die Luft gesprengt worden sei“, ab. Er fasst die Mathematik inhaltlich auf, doch ohne die Basis der klassischen Logik zu verlassen: dies ist eben die Auffassung der meisten Mathematiker. Er zeigt, dass eine strenge Begründung der Arithmetik auch bei dieser Einstellung nötig und möglich ist.

In den elementaren Teilen der Arithmetik (d. h. mit Ausnahme der

Theorie der Irrationalzahlen), wo auch schon die Behandlungsweise des Intuitionismus und die des Formalismus weitgehend analog verlaufen, ist auch die hier gegebene Darstellung denselben ähnlich. Die Theorie der Irrationalzahlen wird üblicherweise mit Hilfe DEDEKINDscher Schnitten entwickelt.

Grosses Gewicht wird auf die richtige Anordnung des Stoffes gelegt, wodurch ein hoher Grad von Eleganz erreicht wird. Es ist ja bekannt, dass in diesem Gebiet eine scheinbar unwesentliche Abänderung einer Definition oder der Reihenfolge der zu beweisenden Sätze zu unbequemen Weitschweifigkeiten führen kann. Besonders elegant ist die Theorie der negativen Zahlen behandelt.

Das Buch ist sehr lehrreich für jeden, der erfahren will, worauf eigentlich *die Wissenschaft des Zweimalzwei* beruht, *ohne dabei* auf schwierige Prinzipienfragen einzugehen.

L. Kalmár.

R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, zweiter Band, VII + 360 S., Berlin, J. Springer, 1929.

Der vorliegende abschliessende Band der COURANTschen Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung ist der Lehre von den Funktionen mehreren Veränderlichen gewidmet. Wie im ersten Bande, so wird auch hier jede neue mathematische Tatsache und Begriffsbildung zunächst geometrisch oder mechanisch plausibel gemacht und erläutert und dann möglichst anschaulich bewiesen. Beispiele folgen überall und gehen an manchen Stellen sogar den Beweisen voran. Präzisionsmathematische Überlegungen und allzu abstrakte Begriffe werden öfters und mit Recht in die Anhänge am Ende der einzelnen Kapitel verwiesen. Analogien mit dem eindimensionalen Falle und die Unterscheide von demselben werden stets sorgfältig besprochen und die Gründe der letzteren aufgedeckt.

Der Stoff wird in sechs Kapiteln untergebracht. Im ersten Kapitel sind die im weiteren Verlaufe der Darstellung benötigten einfachsten Tatsachen aus der analytischen Geometrie, Determinantentheorie, Vektorrechnung zusammengestellt; insbesondere dürften die hier gegebenen Entwickelungen über affine Abbildungen das Verständnis der allgemeinen Sätze der weiteren Kapitel wesentlich fördern. Das zweite Kapitel handelt von Stetigkeit und Differenzierbarkeit, und enthält unter anderem eine sehr saubere, an den Begriff der totalen Differenzierbarkeit anknüpfende Begründung des so ungemein praktischen Rechnens mit Differentialen. Gelegentlich der Einführung der partiellen Ableitungen wäre vielleicht eine Bemerkung von folgendem Charakter am Platze. Bedeuten x, y rechtwinklige, ϱ und φ aber Polarkoordinaten, so kann eine Funktion f aufgefasst werden als Funktion von φ und ϱ, aber auch als Funktion von φ und x oder von φ und y; das Symbol $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ hat dann, entsprechend der Wahl der zweiten unabhängigen Veränderlichen, ebensoviele ganz verschiedene Bedeutungen. Der Student pflegt über diesen Punkt zwar nicht im Allgemeinen, aber bei der Ausrechnung konkreter Transformationsformeln fast immer sehr unsicher zu sein — man könnte ihm da eine kleine Erläuterung gönnen. Das dritte Kapitel enthält die Theorie der impliziten Funktionen, der Einhüllenden von Kurven- und Flächenscharen, der Maxima und Minima, und im Anhange verschiedenes über die singulären Punkte ebener Kurven. Im vierten Kapitel werden die mehrdimensionalen bestimmten Integrale, sowohl die eigentlichen wie auch die uneigentlichen, eingeführt und die Transformationstheorie derselben entwickelt; dies alles wird dann auf die Berechnung von Volumen, Oberfläche, sowie von Momenten und Potentialen angewendet. Im Anhange wird der Leser auch über die Tücken des Begriffes des Flächeninhaltes einer krummen Fläche orientiert. Das fünfte Kapitel darf wohl als die beste überhaupt vorhandene Einführung in die Theorie der Reduktion der Dimensionenzahl mehrfacher Integrale (Sätze von Gauss, Green, Stokes) betrachtet werden. Im sechsten Kapitel findet der Leser Ausführungen, die ihn befähigen sollen sich im Laufe seiner weiteren Studien in den ausführlichen Darstellungen den Differentialgleichungen, Potentialtheorie, Mechanik gleich zu Beginn zurechtzufinden. Der Band schliesst mit einem Verzeichnis der wichtigsten Formeln und Säzte für beide Bände.

Die paar Monate seit dem Erscheinen dieses abschliessenden Bandes haben bereits genügt, um dem Courantschen Werke den Ruf einer ausgezeichnet gelungenen Darstellung eines sonst heiklen Gegenstandes zu verschaffen. Gute Lehrbücher sind eben ziemlich selten und wenn von Zeit zu Zeit ein solches herauskommt, so merken es sofort Alle, die den Stoff lehren oder lernen müssen, mit Freude.

Tibor Radó.

R. Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure, Teil II. (Teubners mathematische Leitfäden 22), VIII + 202 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1929.

Der vorliegende zweite Teil dieses ausgezeichneten Werkes ist in vier Hauptabschnitten gegliedert, die der Reihe nach der Integralrechnung, den unendlichen Reihen (insbesondere den Potenzreihen), den von einem Parameter abhängigen Integralen (Linienintegralen und Integralen im Komplexen), endlich den Determinanten und der Vektorrechnung gewidmet sind.

Die durch 96 Figuren illustrierte Darstellung ist durchwegs knapp, aber äusserst verständlich gehalten. Eine reiche Sammlung von Übungsaufgaben erleichtert das Studium des Buches. Die Klarheit und Gründlichkeit der Darlegung sowie die knappe, stets elegante Darstellung macht das Buch für jeden Studierenden der Mathematik und Technik besonders empfehlungswert.

Nagy.

Reprinted by arrangement with the publishers
„KULTURA" Hungarian Trading Company
foor Books and Newspapers
Budapest, POB. 149.
Hungary

623423. Terv Nyomda